

فصل دوم

حد و پیوستگی

۱. همسایگی‌های زیر را به صورت مجموعه بنویسید. پس آنها را روی یک خط نشان دهید.

$$\text{الف) } N(1, \frac{1}{2}) = \left\{ x \mid |x-1| < \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{ب) } N(0, 3) = \{x \mid |x| < 3\}$$

$$\text{ج) } N'(1, 3) = \{x \mid |x-1| \leq 3\}$$

$$\text{د) } N'(1, 5) = \{x \mid |x-1| \leq 5\}$$

۲) مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+3| < 1\}$ یک همسایگی متقارن a به شعاع r است. a و r را تعیین کنید.

حل:

$$|2x+3| = 2 \left| x + \frac{3}{2} \right| = 2 \left| x - \left(-\frac{3}{2}\right) \right| < 1$$

$$\Rightarrow \left| x - \left(-\frac{3}{2}\right) \right| < \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}, \quad r = \frac{1}{2}$$

مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |3x-1| < |x+1|\}$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و به شعاع r است. a و r را تعیین کنید:

حل:

$$|3x-1| < |x+1| \quad \Rightarrow \quad \frac{|3x-1|}{|x+1|} < 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3x-1}{x+1} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \frac{3x-1}{x+1} < 1$$

فصل دوم: حد و پیوستگی ۳

$$\Rightarrow -1 < 3 \frac{-4}{x+1} < 1 \Rightarrow 3 - \frac{4}{x+1} < 1$$

$$\Rightarrow 2 < \frac{4}{x+1} \Rightarrow 1 < \frac{2}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{1-x}{x+1}$$

$$\Rightarrow -1 < x < 1$$

$$-1 < 3 - \frac{4}{x+1} - 4 < \frac{-4}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{x+1} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{-x}{x+1} < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

$$(-1, 1) \cup (-1, 0) = (-1, 1)$$

جواب = $a = 0$, $r = 1$

اگر $(2a-4, a+2)$ یک همسایگی متقارن 5 باشد. شعاع همسایگی را تعیین کنید:

حل:

$$N(5, 7) = (2a-4, a+2)$$

$$\Rightarrow (5-7, 5+r) = (2a-4, a+2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5-r = 2a-4 \\ 5+r = a+2 \end{cases} \Rightarrow 10 = 3a-2 \Rightarrow \begin{matrix} a=4 \\ r=1 \end{matrix}$$

5) مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+3| < 6\}$ یک همسایگی a به شعاع 4 است.

a و r را تعیین کنید:

$$|2x+3| < 6 \Rightarrow 2 \left| x + \frac{3}{2} \right| < 6 \Rightarrow \left| x + \frac{3}{2} \right| < 3$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2}, r = 3$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۴

تمرین. 6-2-2 صفحه 63

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (5x + 4) = 9 \quad |5x + 4 - 9| = 5|x - 1| < 4$$

$$\Rightarrow |x - 1| < \frac{4}{5}$$

پس قرار می دهیم $d \leq \frac{e}{5}$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} (3x + 2) = -4$$

$$|3x + 2 + 4| = 3|x + 2| < 4 \Rightarrow |x + 2| < \frac{4}{3}$$

قرار می دهیم $d \leq \frac{e}{3}$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

$$|x^2 - 4| = |x + 2||x - 2|$$

ماکزیمم $|x + 2|$ را در همسایگی $-1 < x - 2 < 1$ به دست می آوریم.

$$-1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow \max(x + 2) = 5$$

$$\Rightarrow |x^2 - 4| \leq 5|x - 2| < 4$$

کافی است $d \leq \min\left\{1, \frac{e}{5}\right\}$ را در نظر بگیریم.

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4 \quad |x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$$

ماکزیمم $|x - 2|$ را در همسایگی زیر می یابیم.

° فصل دوم: حد و پیوستگی

$$-1 < x+2 < 1 \Rightarrow -3 < x < -1 \Rightarrow \max |x-2| = 3$$

کافی است $d \leq \min \left\{ 1, \frac{e}{3} \right\}$ را در نظر بگیریم.

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{x+2} = \frac{4}{3}$$

$$\left| \frac{3x+1}{x+2} - \frac{4}{3} \right| = \left| \frac{9x+3-4x-8}{x+2} \right| = \frac{5|x-1|}{|x+2|}$$

$$-1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow \max \frac{5}{|x+2|} = \frac{5}{2}$$

کافی است $d \leq \min \left\{ 1, \frac{e}{5} \right\}$ را در نظر بگیریم.

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2}{5x-8} = 3$$

$$\left| \frac{x^2+2}{5x-8} - 3 \right| = \left| \frac{x^2+2-15x+24}{5x-8} \right| = \frac{|x-13||x-2|}{|5x-8|}$$

$$-1 < x-2 < 1 \quad 1 < x < 3$$

ماکزیمم روی این بازه به علت صعودی بودن برابر است با: $\frac{|x-13|}{|5x-8|}$

$$\left| \frac{3-13}{15-8} \right| = \left| \frac{-10}{7} \right| = \frac{10}{7}$$

پس کافی است $d \leq \min \left\{ 1, \frac{e}{10} \right\}$ در نظر گرفته شود.

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3x + 3} = 1$$

$$\left| \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3x + 3} \right| = \left| \frac{x^2 - 3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 - 3x + 3} \right| = \frac{3}{|x^2 - 3x + 3|} |x - 2|$$

$$-1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

تابع $x^2 - 3x + 3$ می‌بینیم خود را در $x = \frac{3}{2}$ دریافت می‌کند پس:

$$\max \frac{3}{|x^2 - 3x + 3|} = \frac{3}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 3} = \frac{3}{\frac{9}{4} - \frac{18}{4} + 3} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$

پس کافی است $d \leq \min\left\{1, \frac{e}{4}\right\}$ در نظر گرفته شود.

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow -x < x \left[\frac{1}{x} \right] - 1 \leq 0$$

$$x > 0 \Rightarrow 1 \leq x \left[\frac{1}{x} \right] < 1 - x \Rightarrow x \left[\frac{1}{x} \right] - 1 < -x \Rightarrow \left| x \left[\frac{1}{x} \right] - 1 \right| < |x|$$

اگر $d \leq e$ باشد مسأله حل است.

$$9) \lim_{x \rightarrow 3} (-1)^{[x]} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3} = 0$$

$$\left| (-1)^{[x]} \frac{(x-3)(x+3)}{x^2+3} \right| = \frac{|x+3|}{x^2+3} |x-3|$$

$$-1 < x - 3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$$

$$\max \left\{ \frac{x+3}{x^2+3} \right\} = \frac{7}{4+3} = 1$$

پس کافی است $d \leq \min\{1, e\}$ در نظر گرفته شود.

$$10) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 10x) = -21$$

$$|x^2 - 10x + 21| = |x - 7| |x - 3|$$

$$-1 < x - 3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow \max |x - 7| = |4 - 7| = 3$$

کافی است $d \leq \min \left\{ 1, \frac{e}{3} \right\}$ در نظر گرفته شود.

$$11) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = 7$$

$$\left| \frac{x^2 - 2}{x - 2} - 7 \right| = \left| \frac{x^2 - 2 - 7x + 14}{x - 2} \right| = \frac{|x - 4| |x - 3|}{|x - 2|}$$

$$-1 < x - 4 < 1 \Rightarrow 3 < x < 5$$

$$\max \frac{|x - 3|}{|x - 2|} = \frac{|5 - 3|}{|5 - 2|} = \frac{2}{3}$$

پس قرار می‌دهیم $d \leq \min \left\{ 1, \frac{3}{2} e \right\}$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 1}{5x - 3} = \frac{3}{2}$$

$$\left| \frac{4x - 1}{5x - 3} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{8x - 2 - 15x + 9}{5x - 3} \right| = \frac{7}{|5x - 3|} |x - 1|$$

$$-1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$\max \frac{7}{|5x - 3|} = \frac{7}{|0 - 3|} = \frac{7}{3}$$

پس $d \leq \min \left\{ 1, \frac{3}{7} e \right\}$ را در نظر می‌گیریم.

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} (-1)^{[x]} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$$

$$\left| (-1)^{[x]} \frac{x^2 - 4}{x + 2} - 0 \right| = |x - 2|$$

کافی است $d = e$ در نظر گرفته شود.

$$14) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{1}{6}$$

$$\left| \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} - \frac{1}{6} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{1}{6} \right| = \left| \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} \right|$$

$$= \frac{|x - 9|}{(\sqrt{x} + 3)^2}$$

$$-1 < x - 9 < 1 \Rightarrow 8 < x < 10$$

$$\max \frac{1}{(\sqrt{x} + 3)^2} = \frac{1}{(\sqrt{8} + 10)^2}$$

کافی است $d \leq \min \{1, (\sqrt{8} + 10)^2 e\}$ در نظر گرفته شود.

$$15) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{x - 3} = 2$$

$$\left| \frac{2}{x - 3} - 2 \right| = \left| \frac{2 - 2x + 6}{x - 3} \right| = \frac{2|x - 4|}{|x - 3|}$$

$$-\frac{1}{2} < x - 4 < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{7}{2} < x < \frac{9}{2}$$

$$\text{Max} \frac{2}{|x - 3|} = \frac{2}{\left| \frac{7}{2} - 3 \right|} = 4$$

$$d \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, e \right\} \text{ پس}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{2x-1} = 3$$

$$\left| \frac{2x+1}{2x-1} - 3 \right| = \left| \frac{2x+1-6x+3}{2x-1} \right| = \frac{4}{|2x-1|} |x-1|$$

$$-\frac{1}{4} < x-1 < \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \max \frac{4}{|2x-1|} = \frac{4}{\left| 2\left(\frac{3}{4}\right) - 1 \right|} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

$$d \leq \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{e}{8} \right\} \text{ پس}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x}{x-3} = 2$$

$$\left| \frac{x}{x-3} - 2 \right| = \left| \frac{x-2x+6}{x-3} \right| = \frac{|x-6|}{|x-3|}$$

$$-1 < x-6 < 1 \quad \Rightarrow \quad 5 < x < 7$$

$$\Rightarrow \max \frac{1}{|x-3|} = \frac{1}{|5-3|} = \frac{1}{2}$$

$$d \leq \min\{1, 2e\} \text{ پس}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+3} = -1$$

$$\left| \frac{1}{x+3} + 1 \right| = \left| \frac{x+4}{x+3} \right| = \frac{|x+4|}{|x+3|}$$

$$-\frac{1}{2} < x+4 < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{9}{2} < x < -\frac{7}{2}$$

$$\max \frac{1}{|x+3|} = \frac{1}{\left| -\frac{9}{2} + 3 \right|} = \frac{2}{3}$$

$$d \leq \min\left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}e \right\} \text{ پس}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{5-x}} = \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{5-x}} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2 - \sqrt{5-x}}{\sqrt{5-x}} \right| = \left| \frac{(2 - \sqrt{5-x})(2 + \sqrt{5-x})}{2\sqrt{5-x}(2 + \sqrt{5-x})} \right|$$

$$= \frac{|x-1|}{2\sqrt{5-x}(2 + \sqrt{5-x})}$$

$$-1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$\max \frac{1}{2\sqrt{5-x}(2 + \sqrt{5-x})} = \frac{1}{2\sqrt{5-2}(2 + \sqrt{5-2})}$$

$$d \leq \min\left\{ 1, (2\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}))e \right\} \text{ پس}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x+4} = -8$$

$$\left| \frac{x^2 - 16}{x+4} + 8 \right| = \left| \frac{x^2 - 16 + 8x + 32}{x+4} \right| = \left| \frac{(x+4)^2}{x+4} \right|$$

$$= |x+4|$$

کافی است $d = e$.

تمرین 2-3-29 صفحه 80.

حدهای زیر را حساب کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+4} = \frac{2}{5}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x - 2)}{(x+1)(x - \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x - \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x - \sqrt{x+2}} = \frac{-1-2}{-1 - \sqrt{-1+2}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(x+1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(x+1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{5 \times 4} = \frac{1}{20}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-10)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-10}{x+2} = \frac{-11}{1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 19x - 20}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+20)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+20}{x+1} = \frac{21}{2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(x+9)}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{3} + 3)(x+9)}{\sqrt{x} - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} + 3)(x+9) = 108\{$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x-2} - 1)(\sqrt{x-2} + 1)}{(x+2)(x-3)(\sqrt{x-2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x+2)(x-3)(\sqrt{x-2} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x-2} + 1)} = \frac{1}{5 \times 2} = \frac{1}{10}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2 + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - x + 2)}{(x^0 - 2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x + 2}{x - 2} = \frac{8}{-4} = -2$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{x+1} = 2$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 4x + 3}{x^{15} - 5x + 4} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - x - 3x + 3}{x^{15} - x - 4x + 4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^{19} - 1) - 3(x - 1)}{x(x^{14} - 1) - 4(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x(x^{18} + x^{17} + \dots + x + 1) - 3)}{(x - 1)(x(x^{13} + x^{12} + \dots + x + 1) - 4)} \\
 &= \frac{19 - 3}{14 - 4} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1 + x(x^2 - 1)}{x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1 + x)}{(x^2 - 1)(x + 3)} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$$12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$13) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}{2x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{3}{2}$$

$$14) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \frac{2}{3}$$

تمرین صفحه 106

حد هر یک از توابع زیر را بیابید.

1) $\lim_{x \rightarrow 3} [x]$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} [x] = 3$$

تابع حد ندارد. \Rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [x] = 2$$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} [2x+1]$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [2x+1] = 3$$

تابع حد ندارد. \Rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [2x+1] = 2$$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} [3-2x] = 3 + \lim_{x \rightarrow 1} [-2x]$

حد ندارد. \Rightarrow

4) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{5-x} \Rightarrow$ حد ندارد.

5) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(-1)^{[x]}}{x-2} = \frac{(-1)^1}{1-2} = \frac{-1}{-1} = 1$

6) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^{[x]}}{x-2} = \frac{(-1)^0}{1-2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

7) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - |2-x| - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - (2-x) - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-4}{x-2} = 2$

8) $\lim \frac{\sin x}{\sin 2x} = \lim \frac{\sin x}{x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{1}{2} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = 2$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x - 2}} = 0 \quad (\text{کراندار در حد صفر})$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 2} (x - [x]) \quad \Rightarrow \text{حد وجود ندارد.}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x[x]}{2x + |x|} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x[x]}{2x + |x|} = \frac{0}{2x + x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x[x]}{2x + |x|} = \frac{-4x}{2x - x} = -4 \quad \Rightarrow \text{حد ندارد.}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt[4]{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt[4]{(x+1)^3} + \sqrt[4]{(x+1)^2} + \sqrt[4]{x+1}) + 1}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \frac{4}{3}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{2}}{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}}} = \frac{1}{8}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{\cos^3 x} - \sqrt[6]{\cos^2 x}}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{\cos x}(\sqrt[6]{\cos x} - 1)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)}{\sin^2 x (\sqrt[6]{\cos^5 x} + \dots + \sqrt[6]{\cos x} + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x}{2}}{\sin^2 x} \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) \frac{\sin(1-x)}{x-1} = -2$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$$

$$1-x = t \Rightarrow x = 1-t \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} t \operatorname{tg} \frac{p}{2} (1-t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} t \cot \frac{p}{2} t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{p}{2} t} \cdot \cos \frac{p}{2} t = \frac{2}{p}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \operatorname{tg}(2x) \operatorname{tg} \left(\frac{p}{4} - x\right) = 0 \times -1 = 0$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{x^2}{2} + x)^n - (1 + \frac{x^2}{2} - x)^n}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{x} = 2n$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 1}{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} - 1} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \frac{x}{2} - 2) = 2 - 2 = 0$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 1} ((-1)^{[x]} \frac{x-1}{x}) = 0 \quad (\text{تابع کراندار در تابع با حد صفر ضرب شده})$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{[x]} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 2^3}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$= \sqrt[3]{64} + 2\sqrt[3]{8} + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

$$27) (a \neq 1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)(x-a)}{(x-a)(x^2 + ax + a^2)} = \frac{a-1}{3a^2}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - 1| + 3(1-x^2)[x-1]}{x-1} \quad \text{حد وجود ندارد.}$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x \sin x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 \left(\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \cos \frac{x}{2} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x^2}{2}}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x^2}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$31) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} (1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$32) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-2}{|x-2| + [x-2]} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x-1)}{-(x-2)-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$33) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$34) \lim_{x \rightarrow 1^-} \text{Arcty} \frac{1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \text{Arcty} \frac{1}{0^+} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \text{Arcty}(+\infty) = \frac{p}{2}$$

$$35) \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{Arcty} \frac{1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{Arcty} \frac{1}{0^-} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{Arctg} (-\infty) = -\frac{p}{2}$$

$$36) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{Arc} \cos(1-x)}{\sqrt{x}} = \lim$$

$$37) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\frac{x}{2}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{2}}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{2}}{\sin 2x} = -\frac{1}{4}$$

2-4-32 تمرین صفحه 108

$$(1) \text{ ثابت کنید که اگر } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \text{ آنگاه } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

حل: با توجه به نامساوی $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ و با استفاده از قضیه فشردگی

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ است پس } 0 = \lim_{x \rightarrow a} -|f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$$

(2) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع f در $x=1$ دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x < 1 \\ [x] - a, & x > 1 \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x+4) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - a) = 1 - a$$

$$\Rightarrow 1 - a = 7 \quad a = -6$$

$$(3) \text{ فرض کنید } f(x) = \begin{cases} ax+b & x < -1 \\ x^2-b & x > -1 \end{cases}$$

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 \text{ که}$$

(حل)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - b) = 1 - b = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax + b) = -a + b = 2$$

$$\Rightarrow b = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -3$$

$$(4) \text{ فرض کنید: } f(x) = \begin{cases} 2x - a & x < -3 \\ ax + 2b & -3 \leq x < 3 \\ b - qx & 3 < x \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 3b = -15 \\ -2a + 2b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -5 \\ -a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow 2b = -8$$

$$\Rightarrow b = -4 \quad a = -1$$

$$(5) \text{ فرض کنید } F(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , x \leq 1 \\ x + 1 & , x > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ x & , x > 1 \end{cases}$$

نشان دهید، این توابع در $x = 1$ حد ندارند ولی تابع $f(x)g(x)$ در $x = 1$ حد دارد.

(حل)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

f حد ندارد \Rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$

\Rightarrow حد ندارد g

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2$$

تابع $f(x)g(x)$ را در نظر می‌گیریم:

$$f(x).g(x) = \begin{cases} x^2(x^2 + 3) & , x \leq 1 \\ 2(x+1) & , x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2(x^2 + 3) = 4$$

\Rightarrow تابع حد دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2(x+1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} x(x^2 - 2) \text{ مقدار } f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 1 & , x < 0 \end{cases} \quad (6) \text{ فرض کنید}$$

را حساب کنید.

حل) چون $f(x^2 - 2) = 1$ است. پس

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} (x f(x^2 - 2)) = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$$

(7) حدود زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left([x] - \left[\frac{x}{4} \right] \right) \quad (\text{الف})$$

(حل)

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \left([x] - \left[\frac{x}{4} \right] \right) = 4 - 1 = 3$$

\Rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \left([x] - \left[\frac{x}{4} \right] \right) = 3 - 0 = 3$$

حد = 3

$$\lim([3x] + [-3x]) \quad (\text{ب})$$

حل) توجه کنید اگر $z \notin 3x$ آنگاه $[3x] + [-3x] = -1$ پس حد برابر -1 است.

(8) در مورد تابع $f: R \rightarrow R$ می‌دانیم:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad x, y \in R$$

ثابت کنید که اگر f در نقطه صفر حد داشته باشد آنگاه در هر نقطه دیگر هم حد دارد.

همچنین ثابت کنید که اگر $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود داشته باشد. برابر صفر است.

حل: نقطه دلخواه x_0 را در نظر بگیرید و فرض کنید $t > 0$ باشد.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x_0 + t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f(x_0) + f(t)) = f(x_0) + 0$$

پس $\lim f(x) = f(x_0)$ یعنی تابع در هر نقطه حد دارد.

در فوق از این نکته استفاده کرده‌ایم که $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ می‌شود زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{2}\right) + \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

(9) فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ اگر $A \neq 0$ ثابت کنید عددی مثبت مانند d وجود

دارد که هرگاه $0 < |x - a| < d$ ، آنگاه d وجود دارد که

$$0 < |x-a| < d \quad \Rightarrow \quad |f(x)-A| < \frac{|A|}{2}$$

$$\|f(x)-|A|\| \leq |f(x)-A| < \frac{|A|}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{|A|}{2} < |f(x)-|A||$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|A|}{2} < |f(x)|$$

$$(10) \quad \text{فرض کنید } f(x) = \begin{cases} x-|x| & , & |x| \\ x-|x+1| & , & |x| \end{cases} \text{ ، همه نقاطی را بیابید که } f \text{ در}$$

آنها حد دارد.

(حل) تابع f به صورت زیر قابل بیان است.

$$f(x) = \begin{cases} x-|x| & |x| \\ x-|x+1|-1 & |x| \end{cases}$$

این تابع در اعداد صحیح حد دارد. زیرا اگر $x_0 = x$ عدد صحیح باشد. اگر n زوج باشد

$$x \rightarrow x_0^+ \Rightarrow [x] = n \quad \text{فرد} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = n - n = 0$$

$$x \rightarrow x_0^+ \Rightarrow [x] = n-1 \quad \text{فرد} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = n - (n-1) - 1 = 0$$

مشابهاً اگر n فرد باشد. حد موجود است.

در اعداد غیر صحیح نیز این تابع حد دارد. چون در سمت راست یا چپ $x_{\mathbf{m}}$ ، $[x]$ زوج یا

فرد باقی می ماند.

پس این تابع روی R حد دارد.

(11) فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ و B عددی حقیقی باشد که $A > B$. پ

ثابت کنید عددی مثبت مانند وجود دارد که اگر $d < |x - a| < \delta$ ، آنگاه

$$f(x) > \frac{A+B}{2}$$

(حل) چون $A > B$ پس $A - B > 0$ اگر قرار دهیم $\delta = \frac{A-B}{2}$ چون

حدود وجود دارد. پس $\delta > 0$ وجود دارد که:

$$\begin{aligned} \delta < |x - a| &\Rightarrow \left| f(x) - A < \frac{A-B}{2} \right| \\ &\Rightarrow -\frac{A-B}{2} < f(x) - A < \frac{A-B}{2} \\ &\Rightarrow \frac{A-B}{2} < f(x) \Rightarrow \frac{A+B}{2} < f(x) \end{aligned}$$

(12) فرض کنید $\sqrt{1+x^2} \leq f(x) \leq 1+|x|$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ را حساب کنید

$$\text{حل) داریم: } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+|x|) = 1$$

پس طبق قضیه فشردگی $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

2-5-7 تمرین صفحه 115

(ب) استفاده از تعریف ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow -1} x \frac{2\sqrt{2}}{(x+1)^2} = +\infty \quad (1)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{(x+1)^2} > M \Rightarrow (x+1)^2 < \frac{2\sqrt{2}}{M} \Rightarrow |x+1| < \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{M}}$$

پس کافی است. $d \leq \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{M}}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-3}{(x+2)^4} = -2 \quad (2)$$

$$\frac{-3}{(x+2)^4} < -M \Rightarrow \frac{-3}{(x+2)^4} > M \Rightarrow (x+2)^4 < \frac{3}{M}$$

$$\Rightarrow |x+2| < \sqrt[4]{\frac{3}{M}}$$

پس کافی است. $d \leq \sqrt[4]{\frac{3}{M}}$

$$\frac{2x+3}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2} > M \Rightarrow \frac{5}{x-2} > M-2 \Rightarrow x-2 < \frac{5}{M-2}$$

کافی است. $d \leq \frac{5}{M-2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{\sqrt{x-1}} = -\infty \quad (4)$$

$$\frac{1-4x}{x-4} = \frac{15+16-4x}{x-4} = -4 - \frac{15}{x-4} > M \Rightarrow -\frac{15}{x-4} > M+4$$

$$\Rightarrow -\frac{15}{M+4} > x-4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x}{x-2} = -\infty \quad (6)$$

$$\frac{3x}{x-2} = 3 + \frac{6}{x-2} < -M \Rightarrow \frac{6}{x-2} < -(3+M)$$

$$\Rightarrow -\frac{6}{x+M} < x-2 \Rightarrow d = \frac{3}{3+M}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 5}{2x^2 - 1} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{4x^2 - 5}{2x^2 - 1} - 2 \right| &= \left| \frac{4x^2 - 5 - 4x^2 + 2}{2x^2 - 1} \right| = \left| \frac{3}{2x^2 - 1} \right| < e \\ \Rightarrow \frac{3}{e} < 2x^2 - 1 &\Rightarrow \frac{3+e}{2e} < x^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{1-e}{e}} < x \end{aligned}$$

کافی است $M > \sqrt{\frac{3+e}{2e}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} - 2 \right| &= \frac{1}{x^2 + 1} < e \Rightarrow \frac{1}{e} < x^2 + 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{1-e}{e}} < x \end{aligned}$$

کافی است. $\sqrt{\frac{1-e}{e}} < M$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 8x) = +\infty \quad (9)$$

$$x^2 + 8x = (x+4)^2 - 16 > M \Rightarrow x > \sqrt{M+16} - 4$$

کافی است $N > \sqrt{M+16} - 4$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 4x) = -\infty \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 -x^2 + 4x &= -(x-2)^2 + 4 < -m \\
 \Rightarrow M + 4 &< (x-2)^2 \\
 \Rightarrow 2 + \sqrt{m+4} &< x
 \end{aligned}$$

پس $N > 2 + \sqrt{M+4}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1 \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{x^2+1}{x^2-1} \right| &= \frac{2}{x^2-1} < e \Rightarrow \frac{2}{e} < x^2-1 \\
 \Rightarrow \frac{2+e}{4e} < x &\Rightarrow \sqrt{\frac{2+e}{e}} < x
 \end{aligned}$$

پس $M \sqrt{\frac{2+e}{e}}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2-x} = +\infty \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{2-x} > M &\Rightarrow x^2 > 2M - Mx \\
 \Rightarrow x^2 > Mx + \frac{M^2}{e} &> 2M + \frac{M^2}{e} \\
 \Rightarrow \left(x + \frac{M}{2}\right)^2 &> 2M + \frac{M^2}{2} \\
 \Rightarrow x > \sqrt{2M + \frac{M^2}{e}} - \frac{M}{2}
 \end{aligned}$$

کافی است $N < \sqrt{2M + \frac{M^2}{e}} - \frac{M}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 3) = +\infty \quad (13)$$

$$\begin{aligned} x^5 - 3 > M &\Rightarrow x^5 > M + 3 \\ &\Rightarrow x > \sqrt[5]{M + 3} \end{aligned}$$

پس $N > \sqrt[5]{M + 3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + x) = +\infty \quad (14)$$

$$x^5 + x > M \Rightarrow$$

به علت اینکه $x \rightarrow +\infty$ پس x را می توان نادیده گرفت.

$$x^5 x > x^5 + 1 > M \Rightarrow x > \sqrt[5]{M - 1} \Rightarrow N \geq \sqrt[5]{M - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{2x-4} = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$\left| \frac{x+5}{2(x+1)} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{2}{x+1} \right| < e$$

$$\Rightarrow \frac{4}{e} - 2 < x \Rightarrow M \geq \frac{4}{e} - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \quad (17)$$

$$\sqrt{x^2 + 1} > N \Rightarrow x^2 > N - 1 \Rightarrow x > \sqrt{N - 1} \Rightarrow M \geq \sqrt{N - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - 6x + 2} = +\infty \quad (18)$$

$$-\sqrt{x^2 + 1} > N \Rightarrow (x-3)^2 - 7 > N^2$$

$$\Rightarrow x > \sqrt{N^2 + 7} + 3 \quad M \geq \sqrt{N^2 + 7} + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - 6x + 2} = +\infty \quad (19)$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{x^2 - 4} < -N &\Rightarrow x^2 - 4 > N^2 \Rightarrow x > \sqrt{N^2 + 4} \\ &\Rightarrow M \geq \sqrt{N^2 - 4} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - 2x - 2} = +\infty \quad (20)$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{x^2 - 2x - 2} < N &\Rightarrow (x-1)^2 - 3 > N^2 \Rightarrow x-1 > \sqrt{N^2 + 3} \\ &\Rightarrow x > 1 + \sqrt{N^2 - 3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - x} = -\infty \quad (21)$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{x^2 - x} > -N &\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} > N^2 \\ &\Rightarrow x > \sqrt{\frac{1}{4} + N^2} + 1 \end{aligned}$$

$$M \geq \sqrt{\frac{1}{4} + N^2} + 1 \text{ پس}$$

25-5-2 تمرین صفحه 136

حدود زیر را حساب کنید.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x| - 1}{|x| - x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - 1}{0^-} = +\infty$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{x^3+1} + x} = 0$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2| - |x|^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|n^2| - |n|^2}{n^2 - 1} = 0$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{x}} = 1$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5+x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{3x-x^2}-1} = 0$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3+x}{x^2-5x+6} = \frac{6}{\infty} = \frac{6}{\infty} = -\infty$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$11) \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8) \left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3 \right)}{\left(\sqrt[3]{x} \right) \left(\sqrt{x+1}+3 \right)} = \frac{6}{6} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4 \right) = 4 + 4 + 4 = 12$$

$$12) \quad \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+6}}-3}{(x-27)^3} = \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x}-3}{(x-27)(x-27)^2 \left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+6}+3} \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 27} \left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4 \right)$$

$$13) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{x} (\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}} + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$14) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2[\cos x]}{x} = \frac{2-1}{0^-} = -\infty$$

$$15) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[12]{x^3} - \sqrt[12]{x^4}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[12]{x^3} (1 - \sqrt[12]{x})}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[12]{x^{11}} + \sqrt[12]{x^{10}} + \dots + \sqrt[12]{x+1})} = \frac{1-1}{12} = -\frac{1}{6}$$

$$16) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^2+1})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^4}{4} - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

28-6-2 تمرین صفحه 163

(1) در مورد پیوستگی هر یک از توابع زیر سسروی بازده داده شده تحقیق کنید.

الف) $f(x) = \frac{7}{x-3}$ روی بازه های $[0, 3]$ ، (x) ، $[2, +\infty)$ ، $(-\infty, 2]$

ب) تنها نقطه ناپیوستگی $x=3$ است، پس تابع فقط روی $(-\infty, 2]$ ، $[0, 2]$ ، $[0, 2)$ ، $(-2, 2)$.

حل) نقاط $x = \pm 2$ نقاط ناپیوستگی تابع است. پس بازه های

$(-\infty, -2)$ ، $[0, 2)$ ، $(-2, 2)$ بازه های پیوستگی اند.

ج) $f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{25-x^2}}$ روی بازه‌های $(-\infty, -5)$ و $[-\infty, -5]$ ، $[-5, -2]$ و $(5, +\infty)$ ، $[5, \infty)$ ، $(-2, 5)$ ، $(-2, 5]$

حل) ابتدا دامنه تابع را به دست می‌آوریم.

$$D_f = (-\infty, -5) \cup [-2, 5)$$

	-5	-2	5	
$25 - x^2$	-	+	+	-
$2 + x$	-	-	+	+

طبق دامنه: تابع روی $(5, +\infty)$ ، $[5, +\infty)$ ، $(-2, 5]$ ، $[-5, -2]$ ناپیوسته است.

تابع روی $(-\infty, -5)$ ، $[-2, 5)$ ، $(-2, 5)$ پیوسته است.

(2) فواصل را تعیین کنید که تابع داده شده روی آنها پیوسته باشد.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 12} \quad (1)$$

حل) دامنه تابع برابر $D_f = (-\infty, -3) \cup [4, +\infty)$ است. این بازه‌ها فواصل

پیوستگی اند.

$$f(x) = \frac{7}{x^2 - 9} \quad (2)$$

حل) $D_f = R - \{\pm 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$ این فواصل

فواصل پیوستگی اند.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (3)$$

(حل) چون فرجه رادیکال فرد و زیر رادیکال همه جا پیوسته است. فاصله پیوستگی R است.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4}} \quad (4)$$

$$D_f = [1, 2] \cup (4, +\infty)$$

		۱	۲	۴
$x-4$	-	-	-	+
$x^2 - 3x + 2$	+	-	+	+

(3) نقاط ناپیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

(1) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (حل) $x=2$ نقطه ناپیوستگی است.

(2) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ (حل) $x=1$ نقطه ناپیوستگی است.

(3) $f(x) = \frac{x}{x}$ (حل) $x=1$ نقطه ناپیوستگی است.

(4) $f(x) = \frac{(x-1)(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 3x + 2}$

(حل) $x = 1, 2$ نقاط ناپیوستگی اند.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & x \leq -1 \\ \sqrt{1 - x^2} & -1 < x < 1 \\ 2x + 1 & 1 < x \end{cases} \quad (5)$$

(حل) تابع در $x=-1$ و $x=1$ ناپیوستگی دارد. چون تابع در $x=1$ تعریف نشده

و در $x=-1$ حد ندارد.

$$f(x) = \begin{cases} [x] & -2 < x < 0 \\ x - [x] & 0 \leq x < 2 \end{cases} \quad (6)$$

(حل) تابع در نقاط $x=1$ و $x=-1$ از دامنه اش ناپیوسته است.

این تابع در $x=0$ پیوسته است چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

(4) پیوستگی تابع داده شده را در نقطه یا فاصله داده شده بررسی کنید.

$$f(x) = x - [x] \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 2 \quad (1)$$

(حل) تابع در هر دو عدد صحیح داده شده ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{|x-1|}{x-1} & x \neq 1 \quad x_0 = 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \quad (2)$$

این تابع در $x_0 = 1$ ناپیوسته است چون $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \neq 1 = f(1)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{2x}{|x|} & , \quad x \neq 0 \quad x_0 = 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

این تابع در $x_0 = 0$ ناپیوسته است چون $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2 \neq 2 = f(0)$

$$(4) \text{ فاصله } (4, 6) \text{ و } f(x) = \frac{5}{\sqrt{2-x^2}}$$

دامنه تابع برابر $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$ است پس تابع f روی $(4, 6)$ ناپیوسته است.

$$(5) \text{ در فاصله } [1, +\infty) \text{ , } f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

دامنه تابع برابر $(-\infty, 0-1] \cup [1, +\infty)$ است پس تابع روی $[1, +\infty)$ پیوسته است.

$$(6) \text{ در فاصله } (-\infty, 2] \text{ , } f(x) = \sqrt{2-x} \text{ .}$$

چون $D_f = (-\infty, 2]$ است پس تابع روی $(-\infty, 2]$ پیوسته است.

$$(7) \text{ در فاصله } [-5, 5] \text{ , } f(x) = \sqrt{25-x^2} \text{ .}$$

دامنه تابع برابر $[-5, 5]$ است که تابع روی آن پیوسته است.

$$(8) \quad x_0 = 1 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{4}{|x|} & x > 1 \\ 2[2x] + 1 & x < 1 \end{cases}$$

تابع در $x_0 = 1$ تعریف نشده است پس در این نقطه ناپیوسته است.

(5) اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x - 2}$ پیوسته باشد. $f(2)$ را حساب کنید.

$$\text{حل} \quad f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x+2)}{x-2} = 12$$

$$(6) \text{ تابع } f \text{ با ضابطه } f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x} \text{ ,} & x \neq 0 \\ 2 \text{ ,} & x = 0 \end{cases} \text{ در نقطه } x=0 \text{ چه نوع}$$

ناپیوستگی دارد؟

حل) ناپیوستگی اساسی چون حد وجود ندارد زیرا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x} = 2$$

$$(7) \text{ به ازاء چه مقدار } a \text{ تابع } f \text{ با ضابطه } f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ a & , \quad x = 0 \end{cases} \text{ در } x=0 \text{ پیوسته است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow a = 0 \quad (\text{حل})$$

$$(8) \quad f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & -p \leq x \leq -\frac{p}{2} \\ a \sin x + b & -\frac{p}{2} < x < \frac{p}{2} \\ \cos x & \frac{p}{2} \leq x \leq p \end{cases}$$

مقدار a و b را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}^-} f(x) = a + b = f\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}^+} f(x) = -a + b = f\left(-\frac{p}{2}\right) = 2 \Rightarrow -a + b = 2$$

$$\Rightarrow b = 1, \quad a = -1$$

$$(99) \text{ تابع با ضابطه } f(x) = \left[\frac{x+1}{2} \right] + \left[\frac{x-1}{2} \right] \text{ در } x=1 \text{ چه نوع بستگی دارد؟}$$

(حل) داریم: $f(1) = 1$ تعریف شده است. ناپیوستگی اساسی

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

\Rightarrow است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$

$$(10) \quad \text{اگر} \quad f(x) = \begin{cases} 2x+ax, & x > 2 \\ ax^2+1, & x \leq 2 \end{cases} \quad \text{در } \mathbb{R} \text{ پیوسته باشد مقدار } a \text{ را حساب کنید.}$$

حل) چون ضابطه ها روی \mathbb{R} پیوسته اند کافی است پیوستگی در $x=2$ بررسی شود.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+ax) = 4+2a = f(2) = 4a+1$$

$$\Rightarrow 4+2a = 4a+1 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$(11) \quad \text{به ازاء چه مقدار } a \text{ تابع } f \text{ با ضابطه} \quad f(x) = \begin{cases} [x]-x, & x \notin \mathbb{Z} \\ a, & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{همواره پیوسته است؟}$$

حل) با توجه به خواص جزء صحیح همواره $0 \leq x - [x] < 1$ پس

$0 \leq [x] - x < 1$ بنابراین برای $x \notin \mathbb{Z}$ همواره داریم $[x] - x = -1$ پس باید

$a = -1$ باشد.

$$(12) \quad \text{اگر تابع} \quad f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x > 1 \\ 3, & x = 1 \\ bx-1, & x < 1 \end{cases} \quad \text{در } x=1 \text{ پیوسته باشد } a \text{ و } b \text{ را حساب کنید.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+a) = 3 \Rightarrow 1+a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx-1) = 3 \Rightarrow b-1 = 3 \quad \text{حل}$$

$$\Rightarrow \quad a = 2, \quad b = 4$$

$$(13) \quad \text{به ازاء چه مقدار } a \text{ تابع} \quad f(x) = \begin{cases} e^x + e^{-x}, & x \geq 0 \\ 2a-x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{در نقطه } x=0 \text{ پیوسته}$$

است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2a - x) = 2a = f(0) = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow a = 1 \quad (\text{حل})$$

(14) a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x_0 = 4$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x-2] + b & , \quad x < 4 \\ \left[\frac{x}{3}\right] + b & , \quad x = 4 \\ \frac{x^2 - 16}{x - 4} & , \quad x > 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8 = f(4) = 1 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (a[x-2] + b) = 5a + b = f(4) = 1 + b \quad (\text{حل})$$

$$1 + b = 8 \quad \Rightarrow b = 7 \quad 5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

(15) اگر تابع با ضابطه $f(x) = (a^2 - 4a)[x] + 3[x]$ در \mathbb{R} پیوسته باشد $\frac{x}{x^2 + 1}$

مقدارهای a را پیدا کنید.

حل) نقطه $x_0 = 0$ را در نظر بگیرید داریم: $f(0) = 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -(a^2 - 4a) - 3 = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \quad a = 3$$

(16) پیوستگی تابع $f(x) = [x + [x]][1 - x + [x]]$ را در $X=0$ بررسی کنید.

حل) واضح است که $f(0) = 0$ است.

فرض کنید $x=0/1$ از راست نزدیک صفر باشد. و
 $f(0/1) = [0/1+0][1-0/1+0] = 0$ اگر $x=-0/1$ را از چپ نزدیک صفر در نظر
 بگیریم.

$$f(-0/1) = [-0/1-1][1+0/1+1] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(x) = f(0) = 0$$

بنابراین:

پس تابع در $x_0 = 0$ پیوسته است.

$$(17) \text{ تابع با ضابطه } f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 9x^2 + 5x + 1, & x \in \mathbb{Z} \\ 1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ مفروض است. این}$$

تابع در چند نقطه صحیح پیوسته است. آیا این تابع در $x_0 = \frac{5}{4}$ و $x_0 = \sqrt{2}$ و

$$x_0 = \frac{7}{3} \text{ پیوسته است.}$$

حل) چون برای $x \notin \mathbb{Z}$ ، داریم $f(x) = 1$ ، اگر x_0 عددی صحیح باشد آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$$

پس باید اعداد صحیحی را بیابیم که $f(x_0) = 1$ باشد.

$$4x^{3x} - 9x^2 + 5x + 1 = 1 \Rightarrow 4x^3 - 9x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 9x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = \frac{5}{4}$$

این تابع در اعداد صحیح $x_0 = 0$ و $x_0 = 1$ پیوسته است.

این تابع در نقاط $x_0 = \frac{5}{4}$ ، $x_0 = \sqrt{2}$ ، $x_0 = \frac{7}{3}$ پیوسته است زیرا این اعداد

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

صحیح نیستند و برای همه آنها $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 1$ است.

(18) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x_0 = -2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}, & x < -2 \\ a, & x = -2 \\ b + [x^2], & x > -2 \end{cases}$$

(حل) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = b + 4 = f(-2) = a$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4}{|x + 2|} = \lim_{x \rightarrow -2^-} -\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = 4 = a$$

$\Rightarrow a = 4, \quad b = 0$

(19) a و b را طوری پیدا کنید که تابع زیر همواره پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 + bx - 3, & x < 1 \\ x^3 - x + 4a, & 1 \leq x < 2 \\ 5x - 2b, & x \geq 2 \end{cases}$$

(حل) چون ضابطه ها چند جمله ای اند هر کدام همواره پیوسته اند باید پیوستگی در

$x_0 = 1$ و $x_0 = 2$ برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2ax^2 + bx + 3) = 2a + b + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - x + 4a) = 8 - 2 + 4a$$

$$f(1) = 1 - 1 + 4a = 4a, \quad f(2) = 10 - 2b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b + 3 = 4a \\ 6 + 4a = 10 = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -3 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4b = -2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}, \quad a = \frac{5}{4}$$

32-6-2 تمرین صفحه 170.

(1) فرض کنید تابع g در نقطه $\mathbf{0}$ پیوسته باشد $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ، f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه صفر در نامساوی $|f(x)| \leq g(x)$ صدق کند. ثابت کنید f در نقطه $\mathbf{0}$ پیوسته است.

$$\begin{array}{l} \text{—————} \rightarrow \\ |f(x)| \leq g(x) \Rightarrow |f(\mathbf{0})| \leq g(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Rightarrow |f(\mathbf{0})| = \mathbf{0} \\ -|f(x)| \leq f(x) \leq |x| \Rightarrow \mathbf{0} \leq f(\mathbf{0}) \leq \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{array}$$

حال چون g پیوسته است پس $\lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} g(x) = \mathbf{0}$ از طرفی داریم:

$$-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

چون $\lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} -g(x) = \mathbf{0}$ $f(\mathbf{0}) = \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f(x) = \mathbf{0}$ در نتیجه پس f در

صفر پیوسته است.

(2) فرض کنید تابع f در نقطه a پیوسته است.

الف) فرض کنید تابع f در نقطه a پیوسته است.

الف) اگر $f(a) > 0$ ثابت کنید f در یک همسایگی a مثبت است.

(حل)

چون $f(a) > 0$ است اگر $e = \frac{f(a)}{2}$ را در نظر بگیریم: $0 < d$ موجود است به

طوری که

$$|x-a| < d \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{f(a)}{2} < f(x) - f(a) < \frac{f(a)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3}{2}f(a)$$

چون $f(a) > 0$ پس f در همسایگی d از a ، مثبت است.

ب) اگر $f(a) < 0$ ثابت کنید f در یک همسایگی a منفی است.

(حل)

چون $f(a) < 0$ پس $-f(a) > 0$ اگر قرار دهیم $e = -\frac{f(a)}{2}$ چون f در a پیوسته

است. $4 > 0$ موجود است به طوری که

$$|x-a| < 4 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < -\frac{f(a)}{2}$$

$$\Rightarrow f(a) + \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) - \frac{f(a)}{2}$$

$$\frac{3}{2}f(a) < f(x) < \frac{f(a)}{2} \quad \text{پس}$$

حال چون $f(a) < 0$ پس در همسایگی d از a ، f منفی است.

(3) فرض کنید تابع f در x_0 پیوسته باشد و در هر همسایگی x نقاطی مانند x_1 ، x_2

وجود داشته باشد که $f(x_2) > 0$ ، $f(x_1) < 0$ ، ثابت کنید $f(x_0) = 0$.

(حل) اگر $f(x_0) \neq 0$ طبق مسأله (2) همسایگی هایی حول x_0 وجود دارد که روی

آنها $f(x) > 0$ یا $f(x) < 0$ بنابرین نقاط x_1 ، x_2 با شرایط فوق وجود ندارد

پس $f(x_0) = 0$ است.

(4) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}-1 & , & x \neq 0 \\ \sqrt[3]{x+1}-1 & , & x \neq 0 \\ a & , & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x}{2} - 1}{1 + \frac{x}{3} - 1} = \frac{3}{2} \quad (\text{حل})$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

(5) فرض کنید در نقاط دیگر

$$f(x) = \begin{cases} [x+1] \sin \frac{1}{x} & , & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0 & , & x = 0 \end{cases}$$

پیوستگی f در نقطه های 0 ، 1 بررسی کنید.

$$x_0 = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} [x+1] \sin \frac{1}{x} = 0 \times k = 0 \quad (\text{حل})$$

حد راست این تابع وجود ندارد پس تابع در صفر پیوسته نیست.

برای $x_0 = 1$ حد راست برابر 0 است زیرا:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \times \sin 1 = \sin 1 \neq 0$$

پس تابع در نقطه 1 پیوسته نیست.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , & x > 0 \\ 0 & , & x = 0 \\ -1 & , & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

ناپیوستگی تابع های fog و gof را تعیین کنید.

حل: چون همواره $0 \leq x - [x] < 1$ پس $g(x) > 0$ است لذا $fog(x) = f(g(x)) = 1$ این تابع همواره پیوسته است.

برای gof داریم:

$$gof(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

پس $gof(x) = 1$ همواره پیوسته است.

توجه: این مثال نشان می دهد ممکن است دو تابع ناپیوسته باشند ولی ترکیب آنها پیوسته باشد.

(7) ثابت کنید تابعی مانند f در نقطه a پیوسته است اگر و فقط اگر

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+a) = f(a)$$

حل) اگر f در a پیوسته باشد. به ازای $e > 0$ داده شده $d > 0$ موجود

است که

$$|x - a| < d \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < e$$

اگر به جای x ، $x + a$ قرار دهیم داریم:

$$|x - 0| = (x + a) - a < d \Rightarrow |f(x + a) - f(a)| < e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x + a) = f(a) \quad \text{و این یعنی}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x + a) = f(a) \quad \text{حال فرض کنید:}$$

اگر به جای x قرار دهیم $t - a$ هرگاه $x \rightarrow 0$ آن گاه $t \rightarrow a$.

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a) \quad \text{پس}$$

پس f در a پیوسته است.

(8) نقاط ناپیوستگی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(1) = f(-1) = 1 \quad \text{داریم:} \quad \text{حل)}$$

تابع در 1 پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \Rightarrow$$

تابع در $x = -1$ ناپیوسته است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 = 1 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{p}{2} x & , |x| \leq 1 \\ |x-1| & , |x| > 1 \end{cases} \quad (2)$$

حل داریم $f(-1) = f(1) = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \cos \frac{p}{2} x = 0 \\ &\Rightarrow \text{تابع در } -1 \text{ ناپیوسته است.} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} |x-1| = 2$$

$$f(x) = x[x] \quad (3)$$

حل تابع در اعداد صحیح به غیر از صفر ناپیوسته است. در صفر:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x[x] = 0 \times Q = 0 = f(0)$$

$$f(x) = x - [x] \quad (4)$$

حل تابع در تمام اعداد صحیح ناپیوسته است.

$$x \in R - \{0\}, \quad f(x) = \left[\frac{1}{x} \right] \quad (5)$$

این تابع در نقاط به صورت $\frac{1}{n}$ که $n \in Z$ است ناپیوسته است.

$$f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}] \quad (6)$$

صفر است ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \in Q \\ -x^2 & , \quad x \notin Q \end{cases} \quad (7)$$

حل) این تابع فقط در صفر پیوسته است چون هر دنباله $\{a_n\}$ گویا یا اسم که به صفر میل کند a_n^2 ، $-a_n^2$ نیز به صفر میل می کند.

برای سایر نقاط: اگر $x_0 \in Q$ باشد $a_n = x_0 + \frac{1}{n}$ در Q قرار دارد و

$$f(a_n) = (x_0 + \frac{1}{n})^2 \rightarrow x_0^2 = f(x_0)$$

و $b_n = x_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ در Q قرار ندارد و

$$f(b_n) = -(x_0 + \frac{1}{\sqrt{n}})^2 \rightarrow -x_0^2 \neq f(x_0)$$

مشابه این تابع در اعداد اصم نیز ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & x \in [0, 1] \\ x+1 & x \in (1, 3) \end{cases} \quad (8)$$

حل) این تابع در $x_0 = 1$ ناپیوسته است چون

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \Rightarrow \text{تابع پیوسته نیست}$$

$$f(1) = 1$$

توجه کنید دامنه تابع برابر $[0, 3]$ است که در $x_0 = 1$ پیوسته نیست.

$$x \in [0, 1], \quad f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}[2x] - \frac{1}{2}[1-2x] \quad (9)$$

حل) داریم

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = 1, \quad f(0)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}[2x] - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[-2x]$$

$$= -x + \frac{1}{2}([2x] - [-2x])$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{تابع در صفر ناپیوسته است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 + \frac{1}{2}(2 - (-3)) = -1 + \frac{5}{2}$$

تابع در 1 پیوسته نیست

⇒

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - (-2)) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

تابع در $\frac{1}{2}$ پیوسته نیست ⇒

(9) فرض کنید $f(x) = \sqrt{x-4}$ ثابت کنید f روی بازه $[4,10]$ پیوسته است.

حل) چون برای هر $x \in [4,10]$ ، $x - 4 \geq 0$ است و تابع $x-4$

پیوسته است پس f روی این بازه پیوسته است.

(10) فرض کنید $f: [0, +\infty) \rightarrow R$ تابعی دلخواه باشد و $g(x) = f(|x|)$, ثابت

کنید f در نقطه 0 از راست پیوسته است اگر و فقط اگر g در نقطه 0 پیوسته باشد.

است پس $|x| \geq 0$ از راست پیوسته باشد. چون 0 در f فرض کنید حل)

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = f(0) = g(0)$$

پس g در صفر پیوسته است.

اگر g در صفر پیوسته باشد. آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = f(0)$$

پس f از راست در 0 پیوسته است.

$$(11) \quad \text{آیا معادله } x^5 - 18x + 2 = 0 \text{ ریشه ای در بازه } [-1, 1] \text{ دارد؟}$$

حل) بله اگر $f(x) = x^5 - 18x + 2$ در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} f(0) = 2 & \Rightarrow f(0)f(1) < 0 \Rightarrow \text{تابع دارای ریشه است} \\ f(1) = -15 & \end{aligned}$$

$$(12) \quad \text{ثابت کنید معادله } x^5 - 3x^2 - x + 1 = 0 \text{ حداقل یک ریشه در بازه } (0, 2) \text{ دارد.}$$

حل) $f(x) = x^5 - 3x^2 - x + 1$ را در نظر بگیرید.

حداقل یک ریشه دارد.

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1 - 3 - 1 + 1 = -2 \Rightarrow f(0)f(1) < 0 \Rightarrow$$

$$(13) \quad \text{فرض کنید تابع } f: [1, 2] \rightarrow [0, 3] \text{ پیوسته باشد و } f(1) = 0 \text{ و } f(2) = 3$$

ثابت کنید عددی مانند x_0 در بازه $(1, 2)$ موجود است که $f(x_0) = x_0$.

حل) اگر تابع $h(x) = f(x) - x$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$h(1) = f(1) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$h(2) = f(2) - 2 = 3 - 2 = 1$$

چون $h(1)h(2) < 0$ است. پس x در $(1, 2)$ موجود است که $h(x_0) = 0$ پس

$$f(x_0) = x_0$$

$$(14) \quad \text{فرض کنید } f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin(px) + 3 \text{ . آیا عددی مانند } x_0 \text{ در بازه } (2 \text{ و } -2)$$

$$\text{وجود دارد که } f(x_0) = \frac{7}{3} ?$$

(حل) چون $f(2) = 2 + 3 = 5$ ، $f(-2) = -2 + 3 = 1$ و تابع f روی $(2 \text{ و } -2)$

پیوسته است و $1 < \frac{7}{3} < 5$ پس x_0 وجود دارد.

(15) فرض کنید تابع $f : [-1, 1] \rightarrow R$ پیوسته باشد،

$$f(0) = 0 \text{ ، } x \in [-1, 1] \text{ ، } f(x) \neq 2 \text{ .}$$

(حل) اگر به ازای x_0 ، $f(x_0) > 2$ شود، طبق قضیه مقدار میانی تابع هر مقدار

بین $f(0) = 0$ ، $f(x_0)$ را خصوصاً مقدار 2 را می گیرد یعنی x وجود دارد

که $f(x) = 2$. و این تناقض است. پس همواره $f(x) < 2$ است.

(16) فرض کنید تابع $f : [3, 5] \rightarrow R$ پیوسته باشد.

$$f(3) = 30 \text{ ، } x \in [3, 5] \text{ ، } f(x) \neq 4 \text{ ثابت کنید } f(5) < 4 \text{ .}$$

(حل) اگر $f(5) > 4$ باشد، چون تابع پیوسته است مقادیر بین $f(3) = 3$ و $f(5)$ را

خصوصاً مقدار 4 را می گیرد ، یعنی x وجود دارد که $f(x) = 4$ که تناقض با

فرض است. پس $f(5) < 4$ است.

(17) فرض کنید تابع $f : [0, 3] \rightarrow R$ پیوسته باشد، $f(0) = 1$ و معادله $f(x) = 0$

هیچ ریشه ای در بازه $[0, 3]$ نداشته باشد ثابت کنید برای هر $x \in [0, 3]$ ، داریم

$$f(x) > 0$$

(حل) برای $x \in [0, 3]$ را در نظر بگیرید، f روی این بازه پیوسته است. چون

$f(0) = 1$ ، اگر $f(x) < 0$ باشد، حتماً f روی این بازه ریشه دارد که تناقض است،

پس همواره $f(x) > 0$.

$$(18) \quad f(0) = 0, f: R \rightarrow R \text{ فرض کنید}$$

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), x, y \in R$$

ثابت کنید اگر f در نقطه 0 پیوسته باشد در هر نقطه دیگر هم پیوسته است

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+a) = f(a)$$

$$x \rightarrow 0$$

(حل) نقطه دلخواه a را در نظر بگیرید نشان می دهیم

برای $e > 0$ داده شده، $d > 0$ وجود دارد که

$$|x| < d \Rightarrow |f(x)| < e$$

$$f(x+a) \leq f(x) + f(a)$$

$$\Rightarrow f(x+a) - f(a) \leq f(x)$$

$$\Rightarrow |x| < d \Rightarrow |f(x+a) - f(a)| \leq |f(x)| < e$$

و این یعنی $\lim_{x \rightarrow 0} f(x+a) = f(a)$ پس f در a پیوسته است.

$$x \rightarrow 0$$

(19) فرض کنید I بازه ای باز باشد، تابع های $f, g: I \rightarrow R$ پیوسته باشد. و:

$$s(x) = \text{Min}\{f(x), g(x)\} \quad x \in I$$

$$t(x) = \text{Max}\{f(x), g(x)\} \quad x \in I$$

ثابت کنید s و t پیوسته اند:

(حل) توابع s و t را می توان به صورت زیر نوشت:

$$s(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

$$t(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

با توجه به فرض پیوستگی f و g همه توابع سمت راست پیوسته اند.

(20) دو تابع مانند f و g در نظر بگیرید. آیا ممکن است؟

الف) f در نقطه a پیوسته باشد و g در نقطه a پیوسته نباشد اما $f \circ g$ در نقطه a پیوسته باشد.

حل) تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم

f در $a = 0$ پیوسته است ولی g در $a = 0$ پیوسته نیست اما:

$$f \circ g(x) = 1$$

همه جا پیوسته است.

ب) f در a پیوسته باشد و g در a پیوسته نباشد اما $f \circ g$ در a پیوسته باشد.

حل) مثال قسمت الف را در نظر بگیرید اینبار $g \circ f(x) = 1$.

ج) نه f در a پیوسته باشد و نه g اما $f \circ g$ در a پیوسته باشد.

حل) تمرین (6) مثال مورد نظر است

21) الف) ثابت کنید هر چند جمله ای از درجه فرد حد اقل یک ریشه حقیقی دارد.

حل) اگر $f(x)$ چند جمله ای درجه فرد باشد آنگاه

حداقل یک ریشه دارد.

ب) فرض کنید $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ و $d < 0$ ثابت کنید معادله $p(x) = 0$ حد اقل دو ریشه متمایز دارد.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

\Rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

حل) چون $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty > 0$ و $f(0) = d < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty > 0$$

پس حد اقل ریشه در بازه $(-\infty, 0)$ و یک ریشه در بازه $(0, +\infty)$ دارد.

(22) فرض کنید n عددی زوج باشد

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $a_n a_0 \neq 0$. ثابت کنید معادله

$f(x) = 0$ حداقل دو ریشه حقیقی دارد.

حل) چون $a_n a_0 < 0$ فرض کنید $a_n > 0$ و $a_0 < 0$. چون n زوج است و

پس $a_n > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = +\infty$$

از طرفی $f(0) = a_0 < 0$ پس حد اقل یک ریشه حقیقی در $(-\infty, 0)$ و یک ریشه

حقیقی در $(0, +\infty)$ وجود دارد.

