

فصل اول

تابع

تمرین صفحه 42

(1) دامنه هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$$D_f = R \quad x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow \text{حل:}$$

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 21}}$

$$x^2 - 5x + 21 = x^2 - 5x + \frac{25}{4} + \frac{59}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{59}{4} > 0 \Rightarrow D_f = R \quad \text{حل:}$$

3) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$

$$D_f = (0, +\infty) \quad \text{حل:}$$

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}} \quad x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 3$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 2}} \Rightarrow x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{7}{4}$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \Rightarrow D_f = R$$

6) $f(x) = \frac{x^2}{x} \Rightarrow D_f = R - \{0\}$

7) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_f = (0, +\infty)$

8) $f(x) = \sqrt{\frac{(x^2 + 2x + 1)(-x^2 + x - 1)}{x^2 - 5x + 6}}$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)^2(-x^2+x-1)}{(x-2)(x-3)}}$$

$$(x+1)^2 \geq 0, \quad -x^2+x-1 < 0 \Rightarrow \text{صورت کسر} \leq 0$$

باید مخرج کسر همراه منفی باشد و مخالف صفر یعنی $2 < x < 3$.

$$\Rightarrow D_f = (2, 3)$$

$$9) \quad f(x) = \sqrt[4]{x^2-5+6} \Rightarrow x^2-5x+6 = (x-2)(x-3) \\ \Rightarrow D_f = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

$$10) \quad f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+1} \Rightarrow D_f = R - \{-1\}$$

$$11) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}} \Rightarrow x \neq |x| \Rightarrow x < 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0)$$

$$12) \quad f(x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

(2) دامنه و برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ R_f = \{-1, 1\}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x^2}{x} \Rightarrow D_f = R - \{0\} \\ \Rightarrow x \in D_f \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow R_f = R - \{0\}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x-1}{x-1} \Rightarrow D_f = R - \{1\}, R_f = \{1\}$$

$$4) \quad f(x) = \{-x+3 \quad x > 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, +\infty)$$

چون تابع روی $[-\infty, 1]$ صعودی است برد در این قسمت برابر $[-\infty, 1]$ است و

و چون تابع روی $(1, +\infty)$ نزولی است برد در این قسمت برابر

$$(-\infty, -1+3) = (-\infty, 2)$$

است. پس برد تابع اجتماع این دو مجموعه است که برابر مجموعه زیر است:

$$R_f = (-\infty, 2)$$

$$5) f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = R - \{1\}$$

$$R_f = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$6) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \Rightarrow D_f = R - \{2\}$$

$$\Rightarrow x \in D_f \Rightarrow f(x) = x + 2$$

$$R_f = R - \{4\}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} -x+5 & x > 4 \\ -\sqrt{16-x^2} & -4 < x < 4 \\ x+5 & x \leq -4 \end{cases} \Rightarrow D_f = R - \{4\}$$

$$f_1 = -x+5, \quad x > 4 \Rightarrow R_{f_1} = (-\infty, 1)$$

$$f_2 = -\sqrt{16-x^2}, \quad -4 < x < 4 \Rightarrow R_{f_2} = [-4, 0]$$

$$f_3 = x+5, \quad x \leq -4 \Rightarrow R_{f_3} = [0, -\infty, 1]$$

$$\Rightarrow R_f = R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup R_{f_3} = (-\infty, 1) \cup [-4, 0] = (-\infty, 1)$$

$$8) f(x) = \sqrt{x - |x|}$$

چون همواره داریم $|x| \leq x$ در نتیجه $x - |x| \leq 0$ پس جاهایی که $|x| = x$ است قابل

قبول است یعنی $D_f = [0, +\infty)$.

$$x \in D_f \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - x} = 0 \Rightarrow R_f = \{0\}$$

(3) از جفت توابع زیر کدام یک مساوی هستند؟

فصل دوم: حد و پیوستگی

$$f(x) = \frac{x}{x}, g(x) = 1 \quad (1)$$

مساوی نیستند چون $D_g = R$ و $D_f = R - \{0\}$ با هم برابر نیستند.

$$f(x) = (\sqrt{x})^2 \text{ و } g(x) = x \quad (2)$$

مساوی نیستند چون $D_g = R$ و $D_f = [0, +\infty)$ با هم برابر نیستند.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ و } g(x) = x + 2 \quad (3)$$

(4) فرض کنید $f(x) = \sqrt{x-1}$ مطلوب است. $f(1)$ ، $f(x+1)$ و $f(x^2-1)$ و $f(f(2))$.

$$f(1) = \sqrt{1-1} = 0$$

$$f(x+1) = \sqrt{x+1-1} = \sqrt{x}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x}-1}$$

$$f(x^2-1) = \sqrt{x^2-1-1} = \sqrt{x^2-2}$$

$$f(f(2)) = f(\sqrt{2-1}) = f(1) = 0$$

(5) اگر f تابعی باشد که به ازای هر x و y ، $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

اگر n عدد طبیعی باشد و $f(1) \neq 0$ باشد. مقدار $\frac{f(n)}{f(1)}$ را بیابید.

حل:

$$f(n) = f(1+1+1+\dots+1) = f(1) + f(1) + \dots + f(1)$$

$$= n f(1)$$

$$\Rightarrow \frac{f(n)}{f(1)} = \frac{nf(1)}{f(1)} = n$$

(6) در هر یک از موارد $f+g$ ، $\frac{f}{g}$ ، fog ، gof ، fof ، gog را تعیین کنید.

$$. g(n) = x^2 + 1 , \quad f(x) = \sqrt{x} \text{ (الف)}$$

$$f + g(x) = \sqrt{x} + x^2 + 1$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

$$g \circ g(x) = g(g(x)) = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

$$f(x) = \sqrt{x} , \quad g(x) = 4 - x^2 \text{ (ب)}$$

$$f + g(x) = \sqrt{x} + 4 - x^2$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x}}{4 - x^2}$$

$$f \circ g(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$g \circ f(x) = 4 - (\sqrt{x})^2 = 4 - x$$

$$f \circ f(x) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

$$g \circ g(x) = 4 - (4 - x^2)^2 = 4 - (16 - 8x^2 + x^4) = -4 + 8x^2 - x^4$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{ج})$$

$$f + g(x) = f(x) + g(x) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}} = \frac{x^2 + x}{x-1}$$

$$gof(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$fog(x) = \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{x+1}{1-x}$$

$$fof(x) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x+2}{x-1}}{\frac{2}{x-1}} = \frac{x+2}{2}$$

$$gog(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (\text{د})$$

$$f + g(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{gof(x)}{f}(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{x^2} = \frac{1}{x^4}$$

$$\frac{f}{gof}(x) = \frac{x^2}{\frac{1}{x^2}} = x^4$$

$$\frac{gog(x)}{f}(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{x^2 \sqrt{x}}$$

7) در هر مورد fg و $f-g$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

حل:

$$fg(x) = \begin{cases} x^3 & x < 0 \\ 16 & x \geq 0 \end{cases}, \quad f-g(x) = \begin{cases} x^2 - x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & 0 \leq x < 1 \\ 4x & 1 < x \end{cases} \quad (\text{ب})$$

حل: ابتدا $f(x)$ را به صورت $0 \leq x \leq 1$ می نویسیم، داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 4 & 1 < x \end{cases}$$

$$fg(x) = \begin{cases} x^4 & x < 0 \\ -4x & 0 \leq x \\ 16x & 1 < x \end{cases}$$

$$\text{و } f-g(x) = \begin{cases} x^2 - x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & 0 \leq x < 1 \\ 4x & 1 < x \end{cases} \quad (\text{ب})$$

حل: ابتدا $f(x)$ را به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 4 & 1 < x \end{cases}$ می نویسیم، داریم:

$$fg(x) = \begin{cases} x^4 & x < 0 \\ -4x & 0 \leq x < 1 \\ 16x & 1 < x \end{cases}$$

{S

(ج

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < -1 \\ x^2 + 1 & -1 \leq x < 2 \\ \sqrt{x+2} & 2 < x \end{cases}$$

حل: دامنه مشترک دو تابع برابر $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ است پس داریم:

$$f - g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 - \frac{1}{x} & x < -1 \\ 4 - \sqrt{x+2} & x > 2 \end{cases}$$

$$fg(x) = \begin{cases} \frac{(x^2 - 1)}{x} & x < -1 \\ 4\sqrt{x+2} & x > 2 \end{cases}$$

(8) توابع f و g به صورت زیر داده شده‌اند.

$$f: R - \{3\} \rightarrow R$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+3}{x-3}}$$

$$g: R - \{1\} \rightarrow R$$

$$g(x) = \frac{3 - 8x^3}{1 - x^3}$$

اولاً: ثابت کنید f یک به یک است.

حل:

$$\begin{aligned}
 f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x_1+3}{x_1-3}} = \sqrt[3]{\frac{x_2+3}{x_2-3}} \\
 \Rightarrow \frac{x_1+3}{x_1-3} = \frac{x_2+3}{x_2-3} &\Rightarrow 1 + \frac{6}{x_1-3} = 1 + \frac{6}{x_2-3} \\
 \Rightarrow \frac{1}{x_1-3} = \frac{1}{x_2-3} &\Rightarrow x_1-3 = x_2-3 \\
 &\Rightarrow x_1 = x_2
 \end{aligned}$$

پس f یک به یک است.ثانیاً آیا f و g وارون یکدیگرند.حل: باید $D_g = R_f$ و $D_f = R_g$ باشد.

$$\begin{aligned}
 y = f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+3}{x-3}} &\Rightarrow y^3 = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3} \\
 \Rightarrow y^3 - 1 = \frac{6}{x-3} &\Rightarrow x-3 = \frac{6}{y^3-1} \\
 \Rightarrow x = 3 + \frac{6}{y^3-1} = \frac{3y^3-3+6}{y^3-1} \\
 \Rightarrow x = \frac{3y^3+3}{y^3-1} &\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x^3+3}{x^3-1}
 \end{aligned}$$

با این محاسبه مشخص است که $g(x) \neq f^{-1}(x)$ است.

(9) کدام یک از توابع زیر یک به یک و پوشا است؟

$$f(x) = \frac{|x|+1}{x} \quad (1)$$

$$\text{حل) این تابع به صورت } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & x > 0 \\ \frac{-x+1}{x} & x < 0 \end{cases} \text{ است.}$$

هر جزء این تابع یک به یک و پوشاست، چون تابع هموگرافیک است.

$$f: R^+ \rightarrow R, \quad f(x) = |x| + 1 \quad (2)$$

حل: این تابع به صورت $f(x) = x + 1$ است که یک به یک است.

ولی پوشا نیست چون $R_f = (1, +\infty) \neq R$ است.

$$f: R \rightarrow R, \quad f(x) = \sqrt[3]{x} + 2 \quad (3)$$

حل: این تابع یک به یک است چون:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ \Rightarrow \sqrt[3]{x_1 + 2} &= \sqrt[3]{x_2 + 2} & \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} &= \sqrt[3]{x_2} \\ & & \Rightarrow x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

این تابع پوشا نیز است چون:

$$\begin{aligned} y = \sqrt[3]{x} + 2 &\Rightarrow y - 2 = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = (y - 2)^3 \\ &\Rightarrow R_f = R \end{aligned}$$

$$f: R - \{1\} \rightarrow R, \quad f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad (4)$$

حل: تابع به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ روی دامنه اش حتماً یک به یک است.

این تابع پوشا نیست. چون:

$$y = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x-1} = y-2 \Rightarrow x-1 = \frac{3}{y-2}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \frac{3}{y-2} = \frac{y+1}{y-2}$$

$$R_f = R - \{2\} \neq R.$$

(10) تابع $f: R - \{1\} \rightarrow R - \{a\}$ با ضابطه زیر داده شده است:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

اولاً: ثابت کنید f یک به یک است.

حل:

$$f(x) = \frac{2x-2+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x_1-1}$$

$$f(x) = f(x_2) \Rightarrow 2 + \frac{1}{x_1-1} = 2 + \frac{1}{x_2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1-1} = \frac{1}{x_2-1} \Rightarrow x_1-1 = x_2-1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

پس f یک به یک است.

ثانیاً a را طوری بیابید که f پوشا باشد.

حل: باید $R_f = R - \{a\}$ را در نظر بگیریم. ابتدا R_f را به صورت زیر می‌یابیم:

$$y = \frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = y-2$$

$$\Rightarrow x-1 = \frac{1}{y-2} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y-2}$$

$$\Rightarrow R_f = R - \{2\} \Rightarrow a = 2$$

11) وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-1} \quad (\text{الف})$$

حل: این تابع یک به یک است. پس وارون دارد و داریم:

$$y = \frac{3x+2}{x-1} \Rightarrow yx - y = 3x + 2 \Rightarrow x(y-3) = y+2$$

$$\Rightarrow x = \frac{y+2}{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

$$f(x) = \sqrt{x-4} \quad (\text{ب})$$

حل: این تابع یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است و داریم:

$$y = \sqrt{x-4} \Rightarrow x-4 = y^2 \Rightarrow x = y^2 + 4$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 4$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ x^2 & 1 \leq x \leq 9 \\ 27\sqrt{x} & 9 < x \end{cases} \quad (\text{ج})$$

حل) چون هر ضابطه یک به یک است، تابع یک به یک و وارون پذیر است:

$$f_1(x) = x, \quad x > 1 \Rightarrow f_1^{-1}(x) = x \quad x > 1$$

$$f_2(x) = x^2, \quad 1 \leq x \leq 9 \Rightarrow f_2^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad 1 \leq x \leq 81$$

$$f_3(x) = 27\sqrt{x}, \quad x > 9 \Rightarrow f_3^{-1}(x) = \frac{x^2}{(27)^2} \quad x > 81$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leq x \leq 81 \\ \left(\frac{x}{27}\right)^2 & x > 81 \end{cases}$$