

فصل دوازدهم

اعداد مختلط

فصل دوازدهم

اعداد مختلط

تمرین صفحه ۵۳۵ .

۱. جوابهای حقیقی معادله زیر را بیابید.

(حل)

$$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$$

$$(4x + 5y) + (2x - 3y)i = 13 + i$$

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1, \quad x = 2$$

۲. حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} \text{الف) } Z &= \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{2\mathbf{0}}{4+3i} = \frac{(5+5i)(4+3i)+2\mathbf{0}(3-4i)}{(3-4i)(4+3i)} \\ &= \frac{5+35i+6\mathbf{0}-8\mathbf{0}i}{24-7i} = \frac{65-45i}{24-7i} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \frac{(1+i)(1+2i)}{1-i} + i = \frac{-1+3i+1+i}{1-i} = \frac{4i}{1-i} = \frac{4i(1+i)}{2} = -2+2i$$

$$\text{ج) } \frac{3i^{30} - i^{19}}{2i-1} = \frac{3(i^2)^{15} - (i^2)^9 i}{2i-1} = \frac{-3+i}{2i-1} = \frac{-3}{5} - \frac{1}{5}i$$

۳. جواب دستگاه زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} (1+i)Z_1 - iZ_2 = 2+i \\ (2+i)Z_1 + (2-i)Z_2 = 2i \end{cases}$$

(حل) از روش کرامر استفاده می کنیم.

$$Z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2+i & -i \\ 2i & 2-i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+i & -i \\ 2+i & 2-i \end{vmatrix}} = \frac{5-2}{3+i-1+2i} = \frac{3}{3i-2}$$

$$Z_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1+i & 2+i \\ 2+i & 2i \end{vmatrix}}{3i-2} = \frac{2i-2-3-4i}{3i-2} = \frac{-5-2i}{3i-2}$$

تمرین صفحه ۵۳۷ .

فرض کنید $a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0 = 0$ که در آن

برای $0 \leq i \leq n$ ، $a_i \in R$ ، ثابت کنید \bar{Z} ریشه معادله فوق است.

(حل)

$$\overline{a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0} = \overline{0}$$

$$\bar{a}_n \bar{Z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{Z} + \bar{a}_0 = 0$$

$$a_n \bar{Z}^n + a_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{Z} + a_0 = 0$$

پس \bar{Z} ریشه معادله است.

تمرین صفحه ۵۳۸ .

۱. فرض کنید $Z_1, Z_2 \in R$ ، $Z_2 \neq 0$ ثابت کنید

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$$

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۴

$$\begin{aligned} \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) &= (Z_1 Z_2^{-1}) = Z_1 \bar{Z}_2^{-1} \\ &= \bar{Z}_1 \bar{Z}_2^{-1} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \end{aligned}$$

۲. عبارات زیر را ساده کنید.

الف)
$$\frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$$

$$= \frac{(8-i)(1+2i)}{1-2i+i^2} = \frac{10+15i}{-2i} = -\frac{15}{2} + 5i$$

ب)
$$\frac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2-i^5 + i^{10} - i^{15}} = \frac{1+i+1}{2-i-1+i} = 2+i$$

ج)
$$3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = 3\left(\frac{2i}{-2i}\right) - 2\left(\frac{2i}{-2i}\right)\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$$

$$= -3 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -3 - i$$

۳. درستی های زیر را ثابت کنید.

الف) $Z + \bar{Z} = 2\text{Re}(Z)$

حل) $(\text{Re}(Z) + \text{Im}(Z)i) + (\text{Re}(Z) - \text{Im}(Z)i) = 2\text{Re}(Z)$

ب) $Z - \bar{Z} = 2\text{Im}(Z)i$

$(\text{Re}(Z) + \text{Im}(Z)i) - (\text{Re}(Z) - \text{Im}(Z)i) = 2\text{Im}(Z)i$

۴. با فرض $Z = x + yi \neq 0$ نمودار $\text{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{2}$ را رسم

کنید.

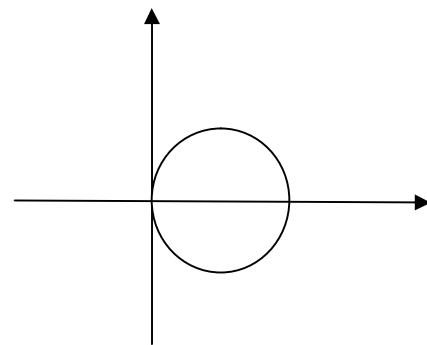
(حل)

فصل دوازدهم: اعداد مختلف

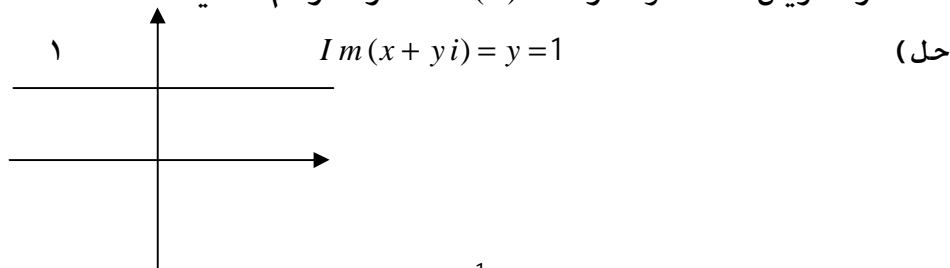
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$



۵. در تمرین ۴ نمودار $\operatorname{Im}(Z)=1$ را رسم کنید.



۶. فرض کنید $\sum_{k=0}^{100} i^k = x+yi$ ، در این صورت

x, y را محاسبه کنید.

(حل) طبق تصاعد هندسی داریم:

$$\sum_{k=0}^{100} i^k = \frac{1-i^{101}}{1-i} = \frac{1-i}{1-i} = 1 = x+yi \Rightarrow x=1, y=0$$

۷. اگر $\frac{x+yi}{x-yi} = x-yi$ مقادیر حقیقی x و y را

بیابید.

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۶

$$\begin{aligned} x + yi &= (x - yi)^2 = x^2 + (-yi)^2 - 2x yi \\ &= (x^2 - y^2) - 2x yi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ -2xy = y \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

$$y \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۸. اگر f یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی باشد؛

نشان دهید. $\overline{f(Z)} = f(\bar{Z})$

$$\begin{aligned} f(Z) &= a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0 \\ \overline{f(Z)} &= \bar{a}_n \bar{Z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{Z} + \bar{a}_0 \\ &= \bar{a}_n \bar{Z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{Z} + \bar{a}_0 \\ &= a_n \bar{Z}^n + a_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{Z} + a_0 = f(\bar{Z}) \end{aligned}$$

تمرین صفحه ۵۴۰ .

فرض کنید $Z_2 = a_2 + b_2 i$, $Z_1 = a_1 + b_1 i$ با در نظر گرفتن

نمایش هندسی اعداد Z_1, Z_2 ، ثابت کنید

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

حل) اگر Z_2, Z_1 را به صورت بردار

$(a_2, b_2), (a_1, b_1)$ در نظر بگیریم، آنگاه

$$\bullet Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

و این خاصیت از جمع بردارها در R^2 نتیجه می شود.

تمرین صفحه ۵۴۳ .

۱. فرض کنید Z_1, Z_2, \dots, Z_n اعداد مختلط باشند. در

این صورت خواص زیر برقرارند.

$$|Z_1 Z_2 \dots Z_n| = |Z_1| |Z_2| \dots |Z_n| \quad (\text{الف})$$

حل) با استفاده از استقراء داریم:

$$|Z_1 Z_2 \dots Z_n| = |Z_1 (Z_2 Z_3 \dots Z_n)| = |Z_1| |Z_2 Z_3 \dots Z_n| = |Z_1| |Z_2| \dots |Z_n|$$

$$|Z^n| = |Z|^n \quad (\text{ب})$$

حل) کافی است در قسمت قبل قرار دهیم:

$$Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = Z$$

$$\operatorname{Re}(Z) \leq |Z| \quad (\text{ج})$$

حل)

$$Z = x + yi \Rightarrow x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |Z| \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) \leq |Z|$$

$$|Z| = |\bar{Z}| \quad (\text{د})$$

حل) اگر قرار دهیم:

$$Z = x + yi$$

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} = |x - yi| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} \Rightarrow |Z| = |\bar{Z}|$$

$$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2| \quad (\text{ه})$$

حل) اگر Z_1, Z_2 را به عنوان دو بردار در

R^2 در نظر بگیریم داریم:

$$|Z_1 + Z_2|^2 = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2| \cos q$$

$$\Rightarrow |Z_1 + Z_2|^2 \leq |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2| = (|Z_1| + |Z_2|)^2$$

$$\Rightarrow |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

$$|Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n| \leq |Z_1| + \dots + |Z_n| \quad (\text{و})$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۸

(حل) با استقراء و استفاده از قسمت (ه) مطلب ثابت می شود.

$$\begin{aligned} |Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n| &= |Z_1 + (Z_2 + \dots + Z_n)| \\ &\leq |Z_1| + |Z_2 + \dots + Z_n| \leq |Z_1| + |Z_2| + \dots + |Z_n| \end{aligned}$$

$$|Z_1 - Z_2| \geq |Z_1| - |Z_2| \quad \text{یا} \quad |Z_1 + Z_2| \geq |Z_1| - |Z_2| \quad (ز)$$

(حل)

$$\begin{aligned} |Z_1| &= |(Z_1 + Z_2) + (-Z_2)| \leq |Z_1 + Z_2| + |Z_2| \leq |Z_1 + Z_2| + |Z_2| \\ \Rightarrow |Z_1| - |Z_2| &\leq |Z_1 + Z_2| \end{aligned}$$

اگر Z_2 را به $-Z_2$ تبدیل کنیم داریم:

$$|Z_1| - |Z_2| \leq |Z_1 - Z_2|$$

۲. اگر $Z_1 = 2 + i$ و $Z_2 = 3 - 2i$ و $Z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ اعداد

مختلط باشند؛ هر یک از عبارات زیر را حساب کنید:

$$|3Z_1 - 4Z_2| \quad (\text{الف})$$

$$3Z_1 - 4Z_2 = -6 + 11i \Rightarrow |3Z_1 - 4Z_2| = \sqrt{157} \quad (\text{حل})$$

$$A = \frac{|2Z_2 + Z_2 - 5 - i|^3}{|2Z_1 - Z_2 + 3 - i|^3} \quad (\text{ب})$$

(حل)

$$2Z_2 + Z_1 - 5 - i = 3 - 4i$$

$$2Z_1 - Z_2 + 3 - i = 4 + 3i$$

$$\Rightarrow A = \frac{|3 - 4i|^3}{|4 + 3i|^3} = \frac{(\sqrt{25})^3}{\sqrt{25}^3} = 1$$

فصل دوازدهم: اعداد مختلف ۹

۳. آرگومان اصلی و طول اعداد زیر را تعیین کنید.

الف) $1-i \Rightarrow |1-i|=\sqrt{2}$, $Arg(1-i)=-\frac{p}{4}$

ب) $-1+i \Rightarrow |-1+i|=\sqrt{2}$, $Arg(-1+i)=\frac{3p}{4}$

ج) $1 \Rightarrow |1|=1$, $Arg(1)=0$

د) $2i \Rightarrow |2i|=2$, $Arg(2i)=\frac{p}{2}$

۴. فرض کنید $Z=x+yi$ و $|Z-1+i|=1$ ، مکان Z را تعیین کنید.

(حل)

$$Z-1+i=(x-1)+(y+1)i$$

$$\Rightarrow |Z-1+i|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=1$$

مکان دایره ای به مرکز $C(1, -1)$ و شعاع $R=1$ است.

۵. مکان هندسی نقاط $Z=x+yi$ را در حالات زیر تعیین کنید.

الف) $|Z+1|=|Z-1|$

(حل)

$$|(x+1)+yi|=|(x-1)+yi|$$

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2} \Rightarrow (x+1)^2=(x-1)^2$$

$$\Rightarrow x=0$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۱۰

$$|Z+i|=|Z-1| \quad \text{(ب)}$$

(حل)

$$\begin{aligned} |x+(y+1)i| &= |(x-1)^2+y^2| \\ \Rightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} &= \sqrt{(x-1)^2+y^2} \\ \Rightarrow x^2+y^2+2y+1 &= x^2-2x+1+y^2 \\ \Rightarrow 2y &= -2x \quad \Rightarrow y = -x \end{aligned}$$

۶. نشان دهید که

$$|Z_1+Z_2|^2 + |Z_1-Z_2|^2 = 2(|Z_1|^2 + |Z_2|^2)$$

(حل)

$$\begin{aligned} |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2|\cos q + |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2|Z_1||Z_2|\cos q \\ = 2(|Z_1|^2 + |Z_2|^2) \end{aligned}$$

۷. فرض کنید Z_1, Z_2, Z_3 سه عدد مختلط نا صفر باشند به طوری که:

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = \mathbf{0}, \quad |Z_1| = |Z_2| = |Z_3|$$

ثابت کنید.

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = \mathbf{0} \quad \text{(ب)} \quad \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \mathbf{0} \quad \text{(الف)}$$

(حل الف) رابطه $Z_i \bar{Z}_i = |Z_i|^2$ را در نظر بگیرید داریم

$$\bar{Z}_i = \frac{|Z_i|^2}{Z_i}$$

۱۱ فصل دوازدهم: اعداد مختلف

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0 &\Rightarrow \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 = 0 \\ &\Rightarrow \frac{|Z_1|^2}{Z_1} + \frac{|Z_2|^2}{Z_2} + \frac{|Z_3|^2}{Z_3} = 0 \\ &\Rightarrow |Z_1|^2 \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) = 0 \end{aligned}$$

ب) طبق قسمت الف، با مخرج مشترک گیری داریم:

$$\frac{Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 Z_3} + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 Z_2 Z_3} + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 Z_2 Z_3} = 0$$

$$\Rightarrow Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 = 0$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0 \Rightarrow (Z_1 + Z_2 + Z_3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + 2(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3) = 0 \Rightarrow Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 0$$

۸. معادله زیر را بر حسب تابع مزدوج بیان کنید.

$$2x + y = 5$$

$$Z = x + yi, \bar{Z} = x - yi \Rightarrow Z + \bar{Z} = 2x, \bar{Z} - Z = 2yi$$

$$\Rightarrow (Z + \bar{Z}) + \frac{Z - \bar{Z}}{2i} = 5$$

۹. هر عدد که ریشه معادله ای به فرم زیر باشد:

$$a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0 = 0$$

که در آن $a_i \in R$ ، یک عدد جبری نام دارد.

ثابت کنید $Z = \sqrt[3]{4} - 2i$ جبری است.

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۱۲

$$\begin{aligned} Z+2i &= \sqrt[3]{4} \Rightarrow (Z+2i)^3 = 4 \\ &\Rightarrow Z^3 + 6Z^2i - 12Z - 8i = 4 \\ &\Rightarrow Z^3 - 12Z - 4 = (8 - 6Z^2)i \\ &\Rightarrow (Z^3 - 12Z - 4)^2 = 6Z^2 - 8 \\ Z^6 + 144Z^2 + 16 - 24Z^4 - 8Z^3 + 96Z - 6Z^2 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

پس Z عدد جبری است.

۱۰. نشان دهید که اگر $|Z|=1$ ، آنگاه برای هر دو عدد مختلط a, b که حداقل یکی از آنها مخالف صفر است داریم:

$$\left| \frac{aZ+b}{\bar{b}Z+\bar{a}} \right| = 1$$

$$\begin{aligned} |aZ+b| &= \left| Z \left(a + \frac{b}{Z} \right) \right| = |Z| \left| a + \frac{b\bar{Z}}{|Z|^2} \right| \\ &= |a + b\bar{Z}| = |\bar{a} + \bar{b}\bar{Z}| = |\bar{a} + \bar{b}Z| \quad (\text{حل}) \\ \Rightarrow \frac{|aZ+b|}{|\bar{a} + \bar{b}Z|} &= \frac{|aZ+b|}{|\bar{a} + \bar{b}Z|} = 1 \end{aligned}$$

۱۱. اگر $Z = x + yi$ نشان دهید که:

$$|\operatorname{Re}(Z)| + |\operatorname{Im}(Z)| \leq \sqrt{2}|Z|$$

(حل)

$$\begin{aligned} 2|Z|^2 &= 2(\sqrt{|\operatorname{Re}(Z)|^2 + |\operatorname{Im}(Z)|^2})^2 \\ &= 2(|\operatorname{Re}(Z)|^2 + |\operatorname{Im}(Z)|^2) \geq (|\operatorname{Re}(Z)| + |\operatorname{Im}(Z)|)^2 \\ \Rightarrow |\operatorname{Re}(Z)| + |\operatorname{Im}(Z)| &\leq \sqrt{2}|Z| \end{aligned}$$

۱۳ فصل دوازدهم: اعداد مختلف

۱۲. نشان دهید $|Z_1 - Z_2| = |1 - \bar{Z}_1 Z_2|$ اگر و تنها اگر

$$|Z_2|=1, |Z_1|=1$$

(حل) فرض کنید $|Z_1|=|Z_2|=1$ باشد آنگاه

$$|Z_1 - Z_2| = \left| Z_1 \left(1 - \frac{Z_2}{Z_1} \right) \right| = |Z_1| \left| 1 - \frac{Z_2 \bar{Z}_1}{|Z_1|^2} \right| = |1 - Z_2 \bar{Z}_1|$$

حال فرض کنید $|Z_1 - Z_2| = |1 - \bar{Z}_1 Z_2|$ باشد. تساوی بالا را

به صورت برعکس ادامه دهید.

۱۳. فرض کنید $Z \neq 0$ عدد مختلط باشد. ثابت کنید

$$|Z|=1 \text{ اگر و تنها اگر } Z = \frac{1}{\bar{Z}}$$

(حل) اگر $|Z|=1$ آنگاه $Z \bar{Z} = |Z|^2 = 1$ پس $\bar{Z} = \frac{1}{Z}$.

اگر $\bar{Z} = \frac{1}{Z}$ آنگاه $|Z|^2 = Z \bar{Z} = 1$ پس $|Z|=1$.

۱۴. مکان عدد مختلط Z را چنان پیدا کنید که اعداد

مختلط Z, iZ, i همواره بر یک استقامت باشند.

(حل)

$$\frac{z - iZ}{Z - i} = \frac{iZ - i}{iZ - Z} \Rightarrow -(Z - iZ)^2 = i(Z - 1)(Z - i)$$

$$\Rightarrow -z^2 + 2iZ^2 + Z^2 = iZ^2 = Z = 1 - iZ$$

$$i(Z + Z) = Z + 1 \Rightarrow iZ = 1$$

$$x = 0, \quad -y = 1, \quad y = -1$$

پس $Z = 0, Z = i, Z = -i$ بر یک استقامتند.

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۱۴

۱۵. اگر C, A اعداد حقیقی و

$$AZ\bar{Z} + DZ + D\bar{Z} + C = 0, Z = x + yi, D = a + ib, AC < 0$$

و نشان دهید مکان Z دایره ای به مرکز $(-\frac{a}{A}, \frac{b}{A})$

شعاع آن به صورت زیر است.

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{A^2} - \frac{C}{A}}$$

(حل)

$$AZ\bar{Z} = A(x^2 + y^2)$$

$$DZ + D\bar{Z} = 2\operatorname{Re}(DZ) = 2(ax - by)$$

$$\Rightarrow Ax^2 + Ay^2 + 2ax - 2by + C = 0$$

$$\Rightarrow A\left(x + \frac{a}{A}\right)^2 + A\left(y - \frac{b}{A}\right)^2 - \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{A^2} + C = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{a}{A}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{A}\right)^2 = \frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{A^2} - \frac{C}{A}$$

مرکز دایره

$$\cdot R = \sqrt{\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{A^2} - \frac{C}{A}}, \quad \left(-\frac{a}{A}, \frac{b}{A}\right)$$

۱۶. معادله خط $Ax + By + C = 0$ را به شکل مختلط

بنویسید.

$$A \frac{Z + \bar{Z}}{2} + B \frac{Z - \bar{Z}}{2i} + C = 0 \quad (\text{حل})$$

۱۷. معادله دایره $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ را به

فرم مختلط بنویسید.

$$Z\bar{Z} + Z + \bar{Z} + i(Z - \bar{Z}) = 0 \quad (\text{حل})$$

۱۵ فصل دوازدهم: اعداد مختلف

۱۸. اگر Z_1, Z_2 دو عدد مختلط باشند، به طوری که $|Z_1 - Z_2| = |Z_1 + Z_2|$ ثابت کنید اختلاف آرماگون های Z_1, Z_2 برابر $\frac{p}{2}$ است.

(حل)

$$\begin{aligned} |Z_1 - Z_2|^2 &= |Z_1 + Z_2|^2 \Rightarrow |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2|\cos q \\ &= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2|Z_1||Z_2|\cos a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4|Z_1||Z_2|\cos q = 0 \Rightarrow q = \frac{p}{2}$$

۱۹. فرض کنید $Z \in C$ ، a, b دو عدد حقیقی نابرابر باشند.

نشان دهید اگر $|Z + ai| = |Z + bi|$ آنگاه

$$Z - \bar{Z} = -(a+b)i$$

(حل)

$$Z = x + yi \Rightarrow x^2 + (y+a)^2 = x^2 + (y+b)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ay = 2by + b^2$$

$$(2a - 2b)y = b^2 - a^2 \Rightarrow y = -\frac{a+b}{2}$$

$$Z - \bar{Z} = 2yi = -(a+b)i$$

تمرین صفحه ۵۴۶.

اعداد زیر را به صورت مثلثاتی نمایش دهید:

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۱۶

$$\text{الف) } Z_1 = -3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{5p}{6} + i \sin \frac{5p}{6} \right)$$

$$\text{ب) } Z_2 = \frac{(i-1)^2}{i} = \frac{-2i}{i} = -2 = 2(\cos p + i \sin p)$$

$$\text{ج) } Z_3 = -1 - \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \left(-\frac{p}{3}\right) + i \sin \left(-\frac{p}{3}\right) \right)$$

تمرین صفحه ۵۴۷ .

ثابت کنید دستور دمو آور برای $n < 0$ صحیح نیز برقرار است.

حل) اگر قرار دهیم $e^{iq} = \cos q + i \sin q$ ، $n = -m$ باشد آنگاه

$$\begin{aligned} Z = e^{iq} &\Rightarrow Z^{-m} = e^{-imq} = \cos(-mq) + i \sin(-mq) \\ &\Rightarrow n < 0 \quad \Rightarrow (\cos q + i \sin q)^n = \cos(nq) + i \sin(nq) \end{aligned}$$

تمرین صفحه ۵۴۷ .

اگر Z_1, Z_2 دو عدد مختلط باشند و $Z_2 \neq 0$ ، ثابت کنید

$$\frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

(حل)

$$Z_1 = |Z_1|(\cos q_1 + i \sin q_1) \quad , \quad Z_2 = |Z_2|(\cos q_2 + i \sin q_2)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|(\cos q_1 + i \sin q_1)}{|Z_2|(\cos q_2 + i \sin q_2)} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}(\cos q_1 + i \sin q_1)(\cos q_2 + i \sin q_2)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}(\cos(q_1 - q_2) + i \sin(q_1 - q_2))$$

$$\Rightarrow \text{Arg}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \alpha_1 - \alpha_2 = \text{Arg } Z_1 - \text{Arg } Z_2$$

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}|\cos(q_1 - q_2) + i \sin(q_1 - q_2)| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

تمرین صفحه ۵۴۹ .

۱. ثابت کنید:

$$\left(\frac{1+itga}{1-itga}\right)^n = \frac{1+itgna}{1-itgna}$$

(حل)

$$\left(\frac{1+itga}{1-itga}\right)^n = \left(\frac{1+i\frac{\sin a}{\cos a}}{1-i\frac{\sin a}{\cos a}}\right)^n = \left(\frac{\cos a + i \sin a}{\cos a - i \sin a}\right)^n$$

$$= \frac{\cos a + i \sin na}{\cos na - i \sin na} = \frac{1+itgna}{1-itgna}$$

۲. فرض کنید n عدد صحیح و مثبت باشد، حاصل

$$I = \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$$

را محاسبه کنید.

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۱۸

$$\begin{aligned}
 I &= (1+i)^n (1-i)^{2-n} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{p}{4} + i \sin \frac{p}{4}\right)^n \sqrt{2} \left(\cos \frac{p}{4} - i \sin \frac{p}{4}\right)^{2-n} \\
 &= 2^{\frac{n}{2}} \times 2^{1-\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{np}{2} + i \sin \frac{np}{4}\right) \left(\cos \frac{(2-n)p}{4} - i \sin \frac{(2-n)p}{4}\right) \\
 &= 2 \left(\cos \frac{np}{2} + i \sin \frac{np}{2}\right)
 \end{aligned}$$

۳. عدد مختلط $(1+i)^n$ را به دو طریق محاسبه و نتیجه را مقایسه کنید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 (1+i)^2 = 2i &\Rightarrow n=2k &\Rightarrow (1+i)^n = (2i)^k \\
 n=2k+1 &\Rightarrow (1+i)^n = (2i)^k (1+i)
 \end{aligned}$$

۵. ثابت کنید.

$$\frac{\sin 4q}{\sin q} = 2 \cos 3q + 6 \cos q - 4$$

(حل)

$$\begin{aligned}
 Z = \cos q + i \sin q &\Rightarrow Z^4 = \cos 4q + i \sin 4q \\
 ((\cos^2 q - \sin^2 q) + 2i \sin q \cos q)^2 &= \cos 4q + i \sin 4q \\
 (\cos 2q + i \sin 2q)^2 &=
 \end{aligned}$$

تمرین صفحه ۵۵۶ .

۱- معادله $Z^2 + (2i-3)Z + 5-i = 0$ را حل کنید.

(حل)

$$\begin{aligned} \left(Z + \frac{2i-3}{2}\right)^2 &= i-5 - \frac{(2i-3)^2}{4} \\ \left(Z + \frac{2i-3}{2}\right)^2 &= \frac{4i-20+4+6i-9}{4} = \frac{10i-25}{4} \\ Z &= \frac{3-2i}{2} \pm \sqrt{10i-25} \end{aligned}$$

۲- فرض کنید $(Z \neq 1)$. در این صورت معادله زیر را حل کنید:

$$1+Z+Z^2+Z^3+Z^4+Z^5=0$$

(حل) دو طرف را در $(1-Z)$ ضرب می کنیم.

$$1-Z^6=0 \Rightarrow Z^6=1$$

$$W_i = \cos\left(\frac{kp}{3}\right) + i \sin\left(\frac{kp}{3}\right)$$

$$W_0=1, \quad W_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad W_3=-1$$

$$W_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad W_5=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ریشه $Z=1$ قابل قبول نیست. چون با ضرب $1-Z$ تولید شده است.

۳. اگر W یکی از ریشه های موهومی، n ام واحد باشد. نشان دهید:

$$1+W+W^2+\dots+W^{n-1}=0$$

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۲۰

$$W \neq 1, \quad W^n = 1 \Rightarrow W^n - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (W - 1)(W^{n-1} + W^{n-2} + \dots + W + 1) = 0$$

$$W \neq 1 \Rightarrow 1 + W + W^2 + \dots + W^{n-1} = 0$$

۴. معادله زیر را حل کنید:

$$iZ^3 + 8 = 0$$

(حل)

$$-Z^3 + 8i = 0 \Rightarrow Z^3 = 8i$$

$$r = 8, \quad q = \frac{p}{2}$$

$$W_k = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{2kp + \frac{p}{2}}{3} + i \sin \frac{2kp + \frac{p}{2}}{3} \right)$$

$$W_0 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$W_1 = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$W_3 = -2i$$

۵. ریشه های هر یک از اعداد زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } (-1+i)^{\frac{1}{3}}, \quad r = \sqrt{2}, \quad q = \frac{3p}{4}$$

$$W_k = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{2kp + \frac{3p}{4}}{3} + i \sin \frac{2kp + \frac{3p}{4}}{3} \right)$$

$$W_0 = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$W_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11p}{12} + i \sin \frac{11p}{12} \right)$$

$$W_2 = \sqrt[6]{2} \cos \frac{19p}{12} + i \sin \frac{19p}{12}$$

ب) $(-2\sqrt{3} - 2i)^{\frac{1}{3}}$, $r = 4$, $q = \frac{7p}{6}$

$$W_k = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{2kp + \frac{7p}{6}}{3} + i \sin \frac{2kp + \frac{7p}{6}}{3} \right)$$

$$W_0 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{7p}{24} + i \sin \frac{7p}{24} \right)$$

$$W_1 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{19p}{24} + i \sin \frac{19p}{24} \right)$$

$$W_2 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{31p}{24} + i \sin \frac{31p}{24} \right)$$

$$W_3 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{43p}{24} + i \sin \frac{43p}{24} \right)$$

۷. معادله $6Z^4 - 25Z^3 + 32Z^2 + 3Z - 10 = 0$ را حل کنید.

حل) مقسوم علیه های -10 برابر ± 1 و ± 2 و ± 5 است.

مقسوم علیه های 6 برابر ± 1 و ± 2 و ± 3 است.

۱۰. معادله $(1+Z)^5 = (1-Z)^5$ را حل کنید.

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۲۲

(حل)

$$\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)^5 = 1, \quad W^5 = 1, \quad W = \frac{Z+1}{Z-1}$$

$$W_0 = 1 \Rightarrow \frac{1+Z}{1-Z} = 1 \Rightarrow Z_0 = 0$$

$$W_1 = \cos \frac{2p}{5} + i \sin \frac{2p}{5} = \frac{1+Z_1}{1-Z_1}$$

$$W_2 = \cos \frac{4p}{5} + i \sin \frac{4p}{5} = \frac{1+Z_2}{1-Z_2}$$

$$W_3 = \cos \frac{6p}{5} + i \sin \frac{6p}{5} = \frac{1+Z_3}{1-Z_3}$$

$$W_4 = \cos \frac{8p}{5} + i \sin \frac{8p}{5} = \frac{1+Z_4}{1-Z_4}$$

۱۱. هر یک از عبارات زیر را ساده کنید.

(الف)

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}} = \left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{6}} =$$

$$\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{p}{4}}}{2 e^{-i\frac{p}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{7p}{12}}$$

$$Z_k = \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{2kp - \frac{7p}{12}}{6} + i \sin \frac{2kp - \frac{7p}{12}}{6} \right)$$

۲۳ فصل دوازدهم: اعداد مختلف

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$$

ب)
$$\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{p}{4}}}{2 e^{i\frac{p}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{5p}{12}}$$

$$Z_k = \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos\left(\frac{2kp - \frac{5p}{12}}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2kp - \frac{5p}{12}}{6}\right) \right)$$

۱۲. معادله $(x+i)^n - (x-i)^n = 0$ را حل کنید که در آن x عدد حقیقی است.

$$(x+i)^n - (x-i)^n = 0 \Rightarrow (x+i)^n = (x-i)^n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = 1$$

$$Z = \frac{x+i}{x-i} \Rightarrow Z^n = 1$$

$$Z_k = \cos \frac{2kp}{8} + i \sin \frac{2kp}{8}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{حل})$$

$$Z_k = \frac{x+i}{x-i} \Rightarrow xZ_k - iZ_k = x+i$$

$$x(Z_k - 1) = i(Z_k + 1)$$

$$x = i \frac{Z_k + 1}{Z_k - 1} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

۱۳) منحنی ای بیابید که معادله اش

$$|Z+c| + |Z-c| = 2a$$

باشد که در آن a, c اعداد

حقیقی مثبت اند به طوری که $a > c$.

(حل) طبق تعریف، معادله فوق، معادله یک بیضی است.

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

۱۴. معادله خط مستقیم $Ax + By + C = 0$ را به شکل مختلط بنویسید.

$$A\left(\frac{Z + \bar{Z}}{2}\right) + B\left(\frac{Z - \bar{Z}}{2i}\right) + C = 0 \quad (\text{حل})$$

۱۵. معادله دایره ای را بنویسید که از سه نقطه $1+i, 2i, 1-i$ می گذرد.

(حل) فرض کنید $Z_0 = x_0 + y_0i$ مرکز دایره باشد پس:

$$\begin{aligned} |Z_0 - (1-i)| &= |Z_0 - (1+i)| = |Z_0 - 2i| \\ \Rightarrow (x_0 - 1)^2 + (y_0 + 1)^2 &= (x_0 - 1)^2 + (y_0 + 1)^2 \Rightarrow y_0 = 0 \\ \Rightarrow (x_0 - 1)^2 + 1 &= x_0^2 + 4 \Rightarrow x_0^2 - 2x_0 + 2 = x_0^2 + 4 \end{aligned}$$

مرکز دایره $C(-1, 0)$ است.

$$R = |(-1+0) - (1-i)| = |-2+i| = \sqrt{5}$$

شعاع دایره برابر $R = \sqrt{5}$ است.

۱۶) مکان Z در هر حالت تعیین کنید.

الف) $|Z - i| = 1$: دایره به مرکز $(0, +1)$ و شعاع $R = 1$.

ب) $|Z - 1 - i| = 1$: دایره به مرکز $(1, 1)$ و شعاع $R = 1$.

ج) $|Z - 2i| = \frac{1}{2}$: دایره به مرکز $(0, 2)$ و شعاع $R = \frac{1}{2}$.