فصل چهارم

کاربرد مشتق

14-2-4 تمرین صفحه 290

(1) ابتدا نشان دهید که هریک از توابع زیر دربازه داده شده در شرایط قضیه رل صدق می کند. پس مقدار c مربوطه را بدست آورید.

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ و $x \in [-1 و 2]$

حل) چند جمله ای ها روی هر بازه شرایط قضیه رل را دارند. چون مشتق پذیرند و مشتق آنها نیز چند جمله ای است.

$$f(2) = f(-1) = 0$$
$$f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 4c - 1 = 0$$
$$c = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

2) $f(x) = x^3 - 16x$ و $x \in [-4 و 0]$

حل :

$$f(-4) = -64 + 64 = 0 = f(0)$$
$$f'(c) = 3c^2 - 16 = 0 \Rightarrow c = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$$

3)
$$x \in [0\ ,\ 4]\ ,\ f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$$
$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}$$

پس تابع روی $[0 و 3]$ پیوسته و روی $(0 و 3)$ مشتق پذیر است.

$$f(0)=0=f(3)=3\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3}=0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}c^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{c^{\frac{2}{3}}}=\frac{4c-3}{3c^{\frac{2}{3}}}=0$$

$$\Rightarrow c=\frac{3}{4}$$

4) $f(x)=x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{1}{4}}\ ,\ x\in[0\ ,\ 4]$

حل :

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}$$

پس تابع f روی $[0\text{و}4]$ پیوسته و روی $(0\text{و}4)$ مشتق پذیر است.

$$\frac{3}{4}c^{-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}c^{-\frac{3}{4}}=0$$

$$\frac{3}{4c^{\frac{1}{4}}}-\frac{1}{2c^{\frac{3}{4}}}=\frac{3c^{\frac{1}{2}}-2}{4c^{\frac{3}{4}}}=0$$

$$\Rightarrow c=\frac{4}{9}$$

5) $x\in[-3\ ,\ 7]\ ,\ f(x)=\begin{cases}x+3\rightarrow x\le 2\\ 7-x\rightarrow x>2\end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases}1\ \ \rightarrow x\le 2\\ -1\rightarrow x>2\end{cases}$$

حل) این تابع در 2 پیوسته است، پس همه جا پیوسته است و پس در 2 مشتق پذیر نیست. لذا شرایط را ندارد.

6) $x \in [-3\ ,\ 4]\ ,\ f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x-3}$

حل) تابع در $3 \in [-3\ ,\ 4]$ پیوسته نیست، پس شرایط قضیه را ندارد.

7) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6\ ,\ x \in [2\ ,\ 3]$

حل)

$$f(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$$
$$f(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$$
$$f'(c) = 3c^2 - 12c + 11 = 0$$
$$c = \frac{12 \pm \sqrt{12}}{24} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{12}$$

8) $f(x) = (x - p)\sin x\ ,\ \in [0\ ,\ p]$

حل) چند جمله ای و $\sin x$ همه جا پیوسته و مشتق پذیرند.

$$f(0) = 0 = f(p)$$
$$f'(c) = \sin c + (c - p)\cos c = 0$$
$$\Rightarrow \sin c = (p - c)\cos c$$
$$\Rightarrow \tan c = p - c$$
$$\Rightarrow c + \tan c = p$$

واضح است که $c = p$ جواب دراین بازه است.

9) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 \to x < 2 \\ 5x - 4 \to x \ge 2 \end{cases} \to x \in [-3\ ,\ 4]$

حـــــل) ایــــــن تــــــابع در $2 \in [-3و 4]$ پیوســـــــته نیســـــــت چـــــون

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim(x^2 - 9) = -5 \neq f(2) = 6$$

پس شرایط قضیه برقرار نیست.

10) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} \ , \ x \in [-2 \ , \ 4]$.

حل) این تابع در $1 \in [-2 و 4]$ پیوسته نیست، پس شرایط قضیه برقرار نیست.

(2) اگر $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$ باشد، به کمک قضیه رل ثابت کنید که معادله $4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$ در بازه $(0 و 1)$ حداقل یک ریشه دارد.

حل)
$$f(0) = 0$$
$$f(1) = 1 - 2 + 2 - 1 = 0$$

تابع چند جمله ای در قضیه رل صدق می کند، پس در $(0 و 1)$ حداقل یک c وجود دارد که

$$f'(c) = 4c^3 - 6c^2 + 4c - 1 = 0$$

(3) به کمک قضیه رل ثابت کنید که معادله $x^3 + 2x + c = 0$ ، که در آن c یک ثابت دلخواه است، نمی تواند بیش از یک ریشه حقیقی داشته باشد.

حل) اگر $f(x) = x^3 + 2x + c$ بیش از یک ریشه داشته باشد $f'(x) = 3x^2 + 2$ حداقل یک ریشه دارد که تناقض است.

4) با استفاده از قضیه رُل ثابت کنید معادله $f(x) = 0$ و $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 3$ دقیقا یک ریشه در بازه $(0 و 1)$ دارد.

حل) $f(0)f(1)<0$ پس $f(0)=-3$ و $f(1)=1$ طبق قضیه مقدار میانی حداقل یک ریشه در $(0,1)$ دارد. از طرفی $f'(x)=5x^4+3x^2+2>0$.

چون $f'(x)$ هیچ ریشه ای ندارد پس $f(x)$ دقیقا یک ریشه دارد.

5) ابتدا نشان دهید توابع داده شده در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می کنند. سپس مقدار c مربوطه را بدست آورید.

1) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}\ ,\ x\in[0\ ,\ 1]$.

حل) $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

پس f روی $[0\ ,\ 1]$ پیوسته و روی $(0\ ,\ 1)$ مشتق پذیر است.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{c}}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$$
$$\Rightarrow c=\frac{8}{27}$$

2)

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x-1}\ ,\ x\in\left[\frac{3}{2}\ ,\ 3\right]$$

حل) تابع داده شده روی $\left[\frac{3}{2}\ ,\ 3\right]$ پیوسته روی $\left(\frac{3}{2}\ ,\ 3\right)$ مشتق پذیر است،

$$f'(c) = -\frac{1}{(c-1)^2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{(c-1)^2} = \frac{f(3) - f(\frac{3}{2})}{3 - \frac{3}{2}}$$

$$1 - \frac{1}{(c-1)^2} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = 0 \Rightarrow (c-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow c = 0$$

3)

$$x \in [-1 \text{ و } 5]$$

$$\begin{cases} 2x+3, x<3 \\ 15-2, x \ge 3 \end{cases}$$

حل) تابع در 3 مشتق پذیر نیست، چون $f'_-(3) = 2$ و $f'_+(3) = -2$ ، پس شرایط قضیه را ندارد.

4) $f(x) = 3(x-4)^{\frac{2}{3}}$ ، $x \in [-4 \ , \ 5]$.

حل) $f'(x) = 2(x-4)^{-\frac{1}{3}}$ ، f در $4 \in [-4 \text{ و } 5]$ مشتق پذیر نیست، پس شرایط برقرار نیست.

5) $f(x) = \frac{x^2-3}{x+3}$ ، $x \in [-5 \ , \ 0]$.

تابع در $-3 \in [-5 \ , \ 0]$ پیوسته نیست پس شرایط قضیه برقرار نیست.

6) $f(x) = x^2 + 7x - 1$ ، $x \in [-1 \ , \ 5]$.

حل) چون f چند جمله ای است، شرایط برقرار است. پس

$$2c+7=\frac{f(5)-f(-1)}{6}=\frac{49-7}{6}=7$$
$$\Rightarrow c=0$$

(6) نشان دهید هر چند جمله ای از درجه 3 حداکثر 3 ریشه حقیقی دارد.

حل) چون مشتق چندجمله ای درجه 3، چندجمله ای درجه 2 است و حداکثر 2 ریشه دارد پس چندجمله ای درجه 3 حداکثر 3 ریشه دارد.

(7) نشان دهید معادله $x^5+3x^3+x+13=0$ دارای بیش از یک ریشه حقیقی نیست.

حل) چون درجه چند جمله ای فرد است، حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

از طرفی $f'(x)=5x^4+9x^2+1$ هیچ ریشه ای ندارد، پس چند جمله ای داده شده، دقیقا یک ریشه دارد.

(8) نشان دهید معادله $x^{2n+1}+ax+b=0$ برای $n\in N, a>0$ دقیقا یک ریشه دارد.

حل) چون چندجمله ای از درجه فرد است، حداقل یک ریشه دارد.

از طرفی $f'(x)=(2n+1)x^{2n}+a$ و $a>0$ ، پس $f'(x)$ هیچ ریشه ای ندارد، پس معادله دقیقا یک ریشه دارد.

(9) نشان دهید $x^5+x^3+x+1=0$ دقیقا یک ریشه دارد.

از طرفی $f'(x)=5x^4+3x^2+1$ هیچ ریشه ای ندارد پس معادله دقیقا یک ریشه دارد.

(10) نشان دهید

$$\frac{x}{1+x}<Ln(1+x)<x \quad \text{و} \quad (x>0)$$

حل) تابع $f(t)=Ln(1+n)$ را روی بازه $[0, x]$ در نظر بگیرید این تابع شرایط قضیه

مقدار میانگین را دارد. پس:

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$0<c<x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1+c}=\frac{Ln(1+x)}{x}$$
$$c<x\Rightarrow \frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+c}=\frac{Ln(1+x)}{x}\Rightarrow \frac{1}{1+x}<Ln(1+x)$$
$$0<c\Rightarrow \frac{1}{1+0}=1>\frac{1}{1+c}=\frac{Ln(1+x)}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{1+x}<Ln(1+x)<x$$

(11) نشان دهید.

$$(x>0),\frac{1}{1+x}<Ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$$

حل) کافی است در تمرین قبل به جای x قرار دهیم $\frac{1}{x}$ داریم:

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}<Ln(1+\frac{1}{x})$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1+x}<Ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$$

(12) اگر f بر بازه بسته $[0,1]$ پیوسته و $f(0)=0$ و اگر $f'(x)$ بر بازه بسته باز $(0,1)$ موجود و صعودی باشد، نشان دهید که $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ نیز بر بازه $(0,1)$ صعودی است.

حل) برای $0<x<1$ طبق قضیه مقدار میانگین داریم:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(cx)$$

$$0<x_1<x_2<1\Rightarrow cx_1\le cx_2$$

f' صعودی است $f'\Rightarrow f'(cx_1)\le f'(cx_2)$

g صعودی است $\Rightarrow g(x_1)\le g(x_2)\Rightarrow g$

(13) فرض کنید $f'(x)=\frac{x}{1+x^2}$. ثابت کنید به ازای هر a و b متمایز داریم:

$$\left|f(b)-f(a)\right|\le\frac{1}{2}|b-a|$$

حل)

$$f'(x)=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\le 1-\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

از طرفی $2x^2\le(1+x^2)^2$ پس $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\ge\frac{1}{2}$. لذا

$$f'(x)\le 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

حال اگر a و b متمایز و دلخواه باشد.

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|=|f'(c)|\le\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow|f(b)-f(a)|\le\frac{1}{2}|b-a|$$

(14) اگر $0<b\le a<\frac{p}{2}$ باشد، نشان دهید که:

$$\frac{a-b}{\cos^2 b} \le \tan a - \tan b \le \frac{a-b}{\cos^2 a}$$

حل) تابع $f(x) = \tan x$ را روی بازه $[b \text{ و } a]$ در نظر بگیرید.

این تابع شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست. پس:

$$\frac{\tan a - \tan b}{a-b} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

چون $b < c < a$ و $\frac{1}{\cos^2 x}$ تابعی صعودی است. پس

$$\frac{1}{\cos^2 b} \le \frac{1}{\cos^2 c} \le \frac{1}{\cos^2 a}$$

لذا

$$\frac{1}{\cos^2 b} \le \frac{\tan a - \tan b}{a-b} \le \frac{1}{\cos^2 a}$$

(15) درستی قضیه مقدار میانگین را برای تابع زیر در فاصله $[2 \text{ و } 0]$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

حل) $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1$ پس تابع همه جا خصوصا روی $[0 , 2]$ پیوسته است. از طرفی:

$$f'_-(1) = f'_+(1) = 1 \ , \quad f'(x) = \begin{cases} -x, 0 \le x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x^2}, x > 1 \end{cases}$$

پس مشتق f همه جا خصوصا روی $(0 \ , \ 2)$ موجـود اسـت. لـذا شـرایط قضـیه مقـدار میانگین برقرار است.

(16) ثابت کنید که معادله $x = 2^{-x}$ یک و تنها ریشه در بازه $(0 \ , \ 1)$ دارد.

حل) از $x = 2^{-x}$ نتیجه می گیریم $Log_2 x = -x$

حال تابع $f(x) = Log_2^x + x$ را روی فاصله $(0 \ , \ 1)$ در نظر بگیرید.

$$f(1) = 1 > 0$$

$$f(\frac{1}{2}) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$$ f ریشه ای در $\left(\frac{1}{2} \ , \ 1\right)$ دارد.

از طرفی $f'(x) = \dfrac{1}{Ln2} \cdot \dfrac{1}{x} + 1$ هیچ ریشه ای ندارد. پس $Log_2^x = x$ دقیقا یک ریشه دارد، لذا $x = 2^{-x}$ دقیقا یک ریشه در $(0 \ , \ 1)$ دارد.

(17) قضیه رل را بیان کرده با استفاده از آن نشان دهید که معادله $x^3 + x - 1 = 0$ یـک و فقط یک ریشه حقیقی دارد.

حل) اگـر f روی $[a,b]$ پیوسـته و روی (a,b) مشـتق پـذیر باشـد و $f(a) = f(b)$ آنگاه $c \in (a,b)$ موجود است که $f'(c) = 0$.

چون معادله داده شده از درجه فرد است پس حداقل یک ریشه دارد.

از طرفی $f'(x) = 3x^2 + 1$ هیچ ریشه ای ندارد، پس طبق قضیه رل $f(x)$ نمی توانـد بیش از یک ریشه داشته باشد.

(18) با استفاده از قضیه رل ثابت کنید بین هر دو ریشه حقیقی معادله $e^x \sin x = 1$ حداقل یک ریشه $e^x \cos x = -1$ قرار دارد.

حل) $e^x \sin x = 1$ معادل است با $\sin x = e^{-x}$. و $e^x \cos x = -1$ معادل است با $\cos x = -e^{-x}$.

حال تابع $f(x) = \sin x - e^{-x}$ را در نظر بگیرید. این تابع شرایط قضیه رل را داراست و $f'(x) = \cos x + e^{-x}$.

بنابراین بین هر دو ریشه $f'(x)$ وجود دارد.

یعنی بین هر دو ریشه $\sin x = e^{-x}$ یک ریشه از $\cos x = -e^{-x}$ وجود دارد.

(19) با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت کنید. $0 < x \le 1$ $Ln(\frac{x+1}{x}) \ge \frac{1}{a+1}$.

حل) طبق تمرین (11) برای $x > 0$ داریم $Ln(\frac{x+1}{x}) > \frac{x}{x+1}$ است.

حال اگر $0 < x \le 1$ آنگاه $\frac{x}{x+1} \le \frac{1}{1+x}$ بنابراین:

$$\frac{x}{x+1} \le Ln(\frac{x+1}{x})$$

(20) با استفاده از قضیه مقدار میانگین نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی $a \ge 1$ رابطه زیر برقرار است. (به شرط آنکه $(z+1) > 0$ باشد).

اگر $z \ge 0$ $(1+z)^a \ge 1+az$

حل) تابع $f(x) = (1+x)^a - ax$ را روی فاصله $[0, z]$ در نظر بگیرید

ایـن تـابع شـرایط قضـیه مقـدار میـانگین را داراسـت. پـس $0 < c < z$ موجـودات کـه

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = f'(c) \Rightarrow \frac{(1+z)^a - az - 1}{z} = a(1+c)^{a-1} - a \geq 0$$

چون $c > 0$ است پس $(1+z)^a \geq 1+az$

اگر $z < 0$ تابع $f(x) = (1+x)^a - ax$ را روی $[z,0]$ در نظر می گیریم

$$\frac{f(0)-f(z)}{0-z} = f'(c)$$

$$\frac{1-(1+z)^a + az}{0-z} = (1+c)^a - a \leq 0$$

$$\Rightarrow 1+az \leq (1+z)^a$$

(21) با استفاده از قضیه رل نشان دهید که مشتق تابع $f(x) = x^4 - 8x^2 - 12x$ فقـط یک ریشه در $[-1,1]$ دارد.

حل)

$$f'(x) = 4x^3 - 16x - 12$$

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{12} \Rightarrow x = \pm\frac{4}{\sqrt[2]{3}}$$

ریشه های $f''(x)$ خارج $[-1,1]$ قرار دارند پس $f'(x)$ حداکثر یک ریشـه در $[-1,1]$ دارد.

از طرفی $f'(-1) = -4 + 16 - 12 = 0$ و این تنها ریشه تابع مشتق است.

(22) ثابت کنید که تـابع $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 3x - 2$ در فاصـله $[0\ ,\ 1]$ تنهـا یـک ریشه دارد.

حل) $f(0) = -2 < 0 \; , \; f(1) = 8 > 0$ پس حداقل یک ریشه در $[0 \; , \; 1]$ دارد. از طرفی:

$$f'(x) = 20x^4 + 9x^2 + 3 > 0$$

$f'(x)$ هیچ ریشه ای ندارد پس $f(x)$ دقیقا یک ریشه دارد.

(23) فرض کنید $f(x)$ روی $[0 \; , \; 1]$ مشتق پذیر باشد. ثابت کنید عددی مانند $c \; , \; 0 < c < 1$ وجود دارد به طوری که $c^2 f'(c) + 2cf(c) = f(1)$

حل) تابع $h(x) = x^2 f(x)$ را روی فاصله $[0 و 1]$ در نظر بگیرید این تابع شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست پس:

$$0 < c < 1 \; , \; \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = h'(c)$$
$$0 < c < 1 \; , \; \frac{f(1) - 0}{1} = c^2 f'(c) + 2cf(c)$$
$$\Rightarrow c^2 f'(c) + 2cf(c) = f(1)$$

4-3-8 تمرین صفحه 300 .

(1) تعیین کنید توابع زیر روی چه بازه هایی صعودی یا نزولی هستند.

$$1) \qquad f(x) = -x^5 - 4x + 2$$
$$f'(x) = 5x^4 - 4 = -(5x^4 + 4) < 0$$

f همواره نزولی است.

$$2) \qquad f(x) = x^4 - 2x^2$$
$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

تابع روی $[1 + \infty)$ تابع صعودی روی $[0 \; , \; 1]$ نزولی

روی $[-1\ ,\ 0]$ تابع صعودی و روی $[-\infty\ ,\ -1]$ نزولی است.

3) $f(x)=\dfrac{-x+2}{(x-1)^2}$

$$f'(x)=\frac{-(x-1)^2-2(x-1)(-x+2)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)(-x+1+2x-4)}{(x-1)^4}=\frac{(x-3)}{(x-1)^3}$$

تابع روی $(1\ ,\ 3)$ نزولی و روی $(3\ ,\ +\infty)$ و $(-\infty\ ,\ 1)$ صعودی است.

4) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

$$f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

تابع روی $(-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2})$ صعودی و روی $(-2\ ,\ -\sqrt{2})$ و $(\sqrt{2}\ ,\ 2)$ نزولی است.

5) $f(x)=[x]$

تابع جزء صحیح همه جا صعودی است.

6) $f(x)=|x|-|x+1|$

$$f(x)=\begin{cases}1\rightarrow x<-1\\ -2x-1\rightarrow -1\le x<0\\ -1\rightarrow 0\le x\end{cases}$$

7) $f(x)=x+\cos x$

$f'(x)=1-\sin x\ge 0$

همواره صعودی است.

8) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

تابع روی $(-1\ ,\ 1)$ صعودی و روی $(-\infty\ ,\ -1)$ و $(1\ ,\ +\infty)$ صعودی است.

9) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)<0$$

تابع همواره نزولی است. چون $\frac{1}{\sqrt{x+1}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$.

10) $f(x)=2x+\frac{1}{2x}$

$$f'(x)=2-\frac{1}{2x^2}=\frac{4x^2-1}{2x^2}$$

تابع روی $\left(-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ نزولی و روی $\left(\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right)$ و $\left(-\infty\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$ صعودی است.

11) $f(x)=x\sqrt{5-x^2}$

$$f'(x)=\sqrt{5-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{5-x^2}}=\frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}}$$

تابع روی $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\ ,\ \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ صعودی و روی $\left(-\sqrt{5}\ ,\ -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ و $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\ ,\ \sqrt{5}\right)$ نزولی است.

12) $f(x)=2-(x-1)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=-(x-1)^{-\frac{2}{3}}<0\Rightarrow$ همواره نزولی است

13) $f(x)=x^3(x-2)^2$

$$f'(x)=3x^2(x-2)^2+2x^3(x-2)=x^2(x-2)(3x-6+2x)=x^2(x-2)(5x-6)$$

تابع روی $\left(-\infty \text{ و } \frac{6}{5}\right)$ و $(2 \text{ و } +\infty)$ صعودی و روی $\left(\frac{6}{5} \text{ و } 2\right)$ نزولی است.

14)

$$f(x) = \cos^2 x + \cos x - 2$$
$$f'(x) = -\sin 2x - \cos x = -\cos x(2\sin x + 1)$$
$$= -2\cos x(\sin x + \frac{1}{2})$$

تابع نزولی $0 < x < \frac{p}{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$

تابع صعودی $\frac{p}{2} < x < p \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$

تابع نزولی $p < x < \frac{7p}{6} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$

تابع صعودی $\frac{7p}{6} < x < \frac{3p}{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$

تابع نزولی $\frac{3p}{2} < x < \frac{11p}{6} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$

تابع صعودی $\frac{11p}{6} < x < 2p \Rightarrow f'(m) > 0 \Rightarrow$

2) با فرض $0 < x < \frac{p}{2}$ ، نامساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin x < x$.

حل) تابع $f(t) = \sin t$ را روی $[0 \ , \ x]$ در نظر بگیرید

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد پس.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)\Rightarrow\frac{\sin x}{x}=\cos c<1\Rightarrow\sin x<x$$

ب) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x$

حل) تابع $f(t)=\sin t+\frac{t^3}{6}$ را روی فاصله $[0\ ,\ x]$ در نظر بگیرید

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. پس داریم

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)\Rightarrow\frac{\sin x+\frac{x^3}{6}}{x}=\cos c+\frac{c^2}{3}>1\Rightarrow\sin x>x-\frac{x^3}{6}$$

(3) نشان دهید.

$$(x>0)$$

$$\frac{x}{1+x^2}<\mathrm{Arc}\tan t<x$$

حل) تابع $f(t)=\mathrm{Arc}\tan t$ را روی بازه $[0\ ,\ x]$ در نظر بگیرید

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. پس داریم:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)\Rightarrow\frac{\mathrm{Arc}\tan x-0}{x}=\frac{1}{1+c^2}$$

چون $0<c<x$ پس $\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{1+c^2}<1$ لذا داریم:

$$\frac{1}{1+x^2}<\frac{\mathrm{Arc}\tan x}{x}<1\quad\Rightarrow\quad\frac{x}{1+x^2}<\mathrm{Arc}\tan x<x$$

(4) با فرض $f(x)=x-Ln(1+x)$ و $0<x<1$ نشان دهید.

$$\frac{x^2}{4} < x - Ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$$

حـل) تـابع $f(t) = t - Ln(1+t)$ و $g(t) = t^2$ روی $[0 , x]$ شـرایط قضـیه مقـدار میانگین را دارند، پس داریم:

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{x - Ln(1+x)}{x^2} = \frac{1 - \frac{1}{1+c}}{2c} \Rightarrow \frac{x - Ln(1+x)}{x^2} = \frac{c}{1+c} / 2c$$

$$\frac{x - Ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2(1+c)}$$

از طرفی چون $0 < c < x < 1$ لذا داریم:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2(1+c)} < \frac{1}{2}$$

پس داریم:

$$\frac{1}{4} < \frac{x - Ln(1+x)}{x^2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} < x - Ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$$

(5) نشان دهید: $(x > 0)\ \frac{x}{1+x} < Ln(1+x) < x$

حل) به تمرین صفحه 292 مراجعه کنید.

(6) نامساوی زیر را ثابت کنید: $\frac{2}{p} x < \sin x < x , 0 < x < \frac{p}{2}$

حل) نامساوی $\sin x < x$ در تمرین 2 قسمت الف نشان داده شد.

برای $x > 0$ تابع $f(t) = \sin t - \frac{2}{p} t$ را روی فاصله $\left[x, \frac{p}{2}\right]$ در نظر بگیرید، این تـابع

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد.

$$\frac{f(\frac{p}{2})-f(x)}{\frac{p}{2}-x}\ f'(c)\Rightarrow\frac{0-(\sin x-\frac{2}{p}x)}{\frac{p}{2}-x}=\cos c-\frac{2}{p}\Rightarrow\frac{\sin x-\frac{2}{p}x}{\frac{p}{2}-x}=\frac{2}{p}-\cos c$$

(7) اگر $0<x<\frac{p}{2}$ باشد نشان دهید: $\tan x+\sin x>2x$.

(8) فرض کنید تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و f'' در فاصله (a,b) همـواره موجـود و مثبت باشد. نشان دهید.

$$\forall x,y\in[a,b]:\ f(\frac{x+y}{2})\le\frac{1}{2}(f(x)+f(y))$$

(9) اگر f در بازه $[0,1]$ پیوسـته و $f(0)=0$ و اگـر $f'(x)$ بـر بـازه $(0,1)$ موجـود و صعودی باشد. نشان دهید که $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ نیز بر بازه $(0,1)$ صعودی است.

حل) به تمرین 12 صفحه 292 مراجعه کنید.

نقاط بحرانی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

1) $f(x)=4x^4+4x^3$

$f'(x)=16x^3+12x^2=4x^2(4x+3)=0$

$\Rightarrow \left\{0,-\frac{3}{4}\right\}=$ نقاط بحرانی

2) $f(x)=\frac{-x}{x^2+4}$

$f'(x)=\frac{-x^2-4+2x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{x^2-4}{(x^2+4)^2}=0$

$\Rightarrow \{-2,2\}=$ نقاط بحرانی

3) $f(x)=\sin^2 x-\sin x$

$f'(x)=\sin^2 x-\cos x=0$

$\Rightarrow \cos x=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left\{kp+\frac{p}{2},2kp+\frac{p}{6},2kp+\frac{5p}{6}\right\}=$ نقاط بحرانی

4) $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & -\frac{3}{2}\le x<2 \\ -x+3 & 2\le x\le 5 \end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & -\frac{3}{2}\le x<2 \\ -1 & 2\le x\le 5 \end{cases}$

تابع در $x=2$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست. پس $x=2$ نقطه بحرانی است.

5) $f(x)=x^{\frac{7}{3}}+x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x)=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{7x^2+4x-3}{3x^{\frac{2}{3}}}=0\rightarrow 7x^2+4x-3=0$$

پس نقاط بحرانی $\left\{0,-1,\frac{3}{7}\right\}\Rightarrow$

6) $f(x)=\sqrt[3]{(x^3-3x^2+4)}$

$$f'(x)=\frac{3x^2-6x}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2+4)^2}}$$

$$3x^2-6x=0\quad\Rightarrow x=0,2$$

$$x^3-3x^2+4=0\quad\Rightarrow\quad(x-2)^2(x+1)=0\quad\Rightarrow\quad=2,-1$$

به ازای $x=2$ مشتق موجود است پس

نقاط بحرانی $\{0,-1\}\Rightarrow$

7) $f(x)=\frac{(x+1)}{(x^2-5x+4)}$

حل)

$$D_f=R-\{1,4\}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-5x+4-2x^2-2x+5x+5}{(x^2-5x+4)^2}$$

$$\Rightarrow\quad -x^2-2x+9=0\quad\Rightarrow\quad {}^2+2x-9=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{40}}{2}=-1\pm\sqrt{10}\Rightarrow$$

نقاط بحرانی

8) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 2$

$$D_f = [0,+\infty]$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3x-4}{2x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \quad = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

نقطه بحرانی

21-3-4 تمرین صفحه 313

با استفاده از آزمون مشتق دوم نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی هر یک از توابع زیـر را تعیین کنید.

1)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$x = 0 \Rightarrow f''(0) = -6 \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی

$x = 2 \Rightarrow f''(2) = 6 \Rightarrow$ مینیمم نسبی

2)

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \cos x$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{p}{4}, \frac{3p}{4}$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$x = \frac{p}{4} \Rightarrow f''(\frac{p}{4}) - \cos(\frac{p}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی

$x = \frac{3p}{4} \Rightarrow f''(\frac{3p}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ مینیمم نسبی

$$f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$$
$$f'(x) = -12x^2 + 6x + 18 = -6(2x^2 - x - 6) = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm 7}{4} \Rightarrow x = 2, x = -\frac{3}{2}$$

3)

$$f''(x) = -24x + 6$$
$x = 2 \Rightarrow f''(2) < 0 \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی

$x = -\frac{3}{2} \Rightarrow f''(-\frac{3}{2}) > 0 \Rightarrow$ مینیمم نسبی

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27$$
$$f'(x) = 6x^2 - 18x = 6x(x-3) \Rightarrow x = 0, x = 3$$
$$f''(x) = 12x - 18$$

4)

$x = 0 \Rightarrow f''(0) = -18 < 0 \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی

$x = 3 \Rightarrow f''(0) = 18 > 0 \Rightarrow$ مینیمم نسبی

$$f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}} = 2(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}) = 2(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}) = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$f''(x) = -x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{5}{2}}$$

5)

$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ مینیمم نسبی

6) $f(x) = (x-3)^4 \Rightarrow$ f در $x = 3$ مینیمم نسبی دارد.

7)

$$f(x)=(x-4)^2\sqrt{x} \Rightarrow D_f=[0,+\infty]$$

$$f'(x)=2(x-4)\sqrt{x}+(x-4)^2\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{4x(x-4)+(x-4)^2}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{(x-4)(5x-4)}{2\sqrt{x}}=0 \Rightarrow x=4, x=\frac{4}{5}$$

$$f''(x)=\frac{2\sqrt{x}(10x-24)-\frac{1}{\sqrt{x}}(x-4)(5x-4)}{2\sqrt{x}}=\frac{2x(10x-24)-(x-4)(5x-4)}{2x}$$

$$f''(4)=\frac{8\times16}{8}=16>0 \Rightarrow$$ f در 4 مینیمم نسبی

$$f''(\frac{4}{5})=\frac{\frac{8}{5}\times(-4)}{\frac{8}{5}}<0 \Rightarrow$$ f در $\frac{4}{5}$ ماکزیمم نسبی

8)

$$f(x)=\frac{9}{x}+\frac{x^2}{9}$$

$$f'(x)=-\frac{9}{x^2}+\frac{2x}{9}=\frac{-81+2x^3}{9x^2}=0 \Rightarrow x^3=\frac{81}{2} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{81}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{18}{x^3}+\frac{2}{9} \Rightarrow f''(\sqrt[3]{\frac{81}{2}})>0 \Rightarrow$$ مینیمم نسبی

فصل پنجم

ضد مشتق

9-2-5 تمرین صفحه 350

(1) هر یک از انتگرال های زیر را حل کنید:

الف)
$$\int (3x-2)^4 dx = \frac{1}{3}\int (3x-2)^4 3dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-2)^5}{5}+c$$

ب)
$$\int \frac{x+1}{2\sqrt{x+1}}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}dx = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+c$$

ج)
$$\int x^2\sqrt{1+x}dx$$

قرار دهید $u^2 = 1+x$ پس $2udu = dx$

$$\int (u^2-1)^2 2u^2 du = 2\int (u^6-2u^4+u^2)du$$
$$= 2(\frac{u^7}{7}-\frac{2u^5}{5}+\frac{u^3}{3})+c$$
$$= 2(\frac{(x+1)^{\frac{7}{2}}}{7}-\frac{2(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3})+c$$

د)
$$\int x^3\sqrt{x^2-1}dx$$
$$u^2 = x^2-1 \Rightarrow 2udu = 2xdx \Rightarrow udu = xdx$$
$$\int (u^2+1)udu = \frac{u^4}{4}+\frac{u^2}{2}+c = \frac{(x^2-1)^2}{4}+\frac{x^2-1}{2}+c$$

ه)
$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}dx$$

$$u=\sqrt{x}\Rightarrow 2du=\frac{dx}{\sqrt{x}}\Rightarrow 2\int (u-1)^2\,du=\frac{2}{3}(u-1)^3+c$$
$$=\frac{2}{3}(\sqrt{x}-1)^3+c$$

و)

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^6}}=-\frac{1}{6}\int\frac{-6x^5}{\sqrt{1-x^6}}dx=-\frac{1}{6}\times 2\sqrt{1-x^6}+c$$
$$=-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^6}+c$$

ز)

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}}$$
$$u^2=1+x^2\Rightarrow udu=xdx$$
$$\int\frac{udu}{\sqrt{1+(u^2-1)u^3}}=\int\frac{udu}{\sqrt{1-u^3+u^5}}$$

ح)

$$\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+2)^3}=\int\frac{(x+1)dx}{((x+1)^2+1)^3}$$
$$u=(x+1)^2+1\Rightarrow\frac{du}{u^3}=\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}\times\frac{1}{u^2}+c=-\frac{1}{4((x+1)^2+1)^2}+c$$

ط)

$$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx; u=2\sin x\Rightarrow du=2\cos x dx$$
$$\frac{1}{4}\int\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx=\frac{1}{4}\int\cot^2 x\cdot\csc^2 x dx=-\frac{1}{12}\cot^3 x+c$$

ی)

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}dx$$

$$u = x^3+3x+1 \Rightarrow \frac{du}{3} = (x^2+1)dx$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{1}{2}(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

ک)

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$$

$$u^3 = 1-x \Rightarrow -3u^2du = dx$$

$$-3\int(1-u^3)^2u^3du = -3\int(u^3-2u^6+u^9)du$$

$$= -3(\frac{u^4}{4}-\frac{2u^7}{7}+\frac{u^{10}}{10})+c$$

$$= -3(\frac{(1-x)^{\frac{4}{3}}}{4}-\frac{2(1-x)^{\frac{7}{3}}}{7}+\frac{(1-x)^{\frac{10}{3}}}{10})+c$$

ل)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}dx = \frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}dx = \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}(x^3+1)^{\frac{2}{3}}+c$$

م)

$$\int x\sqrt[5]{5-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int\sqrt[5]{5-x^2}(-2x)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}(5-x^2)^{\frac{6}{5}}+c$$

(2) فرض کنید $f(x)=|x|$ و تابع F به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, x<0 \\ \frac{1}{2}x^2, x\geq 0 \end{cases}$$

نشان دهید F یک ضدّ مشتق f روی $(-\infty,+\infty)$ است.

حل)
$$F'(x)=\begin{cases}-x\ , & x<0\\ x\ , & x\geq 0\end{cases}=f(x)$$

13-3-5 تمرین صفحه 355 .

انتگرال $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$ را حل کنید.

حل)
$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^4 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^4 x}+\int\frac{dx}{(\sin x\cos x)^2}$$
$$=\int\sec^4 xdx+4\int\frac{dx}{(\sin 2x)^2}=\int\sec^2 x(1+\tan^2 x)dx+4\int\csc^2 2x$$
$$=\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}-2\cot 2x+c$$

20-3-5 تمرین صفحه 357 .

(1) هر یک از انتگرال های زیر را حساب کنید.

(1
$$\int\tan^4 xdx=\int\tan^2 x(\sec^2 x-1)dx$$
$$=\int\tan^2 x\sec^2 xdx-\int(\tan^2 x+1)dx+\int dx$$
$$=\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x+c$$

(2
$$\int\tan^6 xdx=\int\tan^2 x\cdot\tan^4 xdx=\int(\sec^2 x-1)\tan^4 xdx$$
$$=\int\tan^4 x\cdot\sec^2 xdx-\int\tan^4 xdx$$
$$=\frac{\tan^5 x}{5}-\frac{\tan^3 x}{3}+\tan x-x+c$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x} dx$$
$$= \int \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{\sin^9 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^9 x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx$$
$$= -\frac{1}{8\sin^8 x} + \frac{1}{6\sin^6 x} + c$$

(3

$$\int \sec^4 x \cdot \cot^6 x dx = \int \frac{\sec^4 x}{\tan^6 x} dx = \int \frac{\sec^2 x(1+\tan^2 x)}{\tan^6 x} dx$$
$$= \int \frac{\sec^2 x}{\tan^6 x} dx + \int \frac{\sec^2 x}{\tan^4 x} dx = -\frac{1}{5\tan^5 x} - \frac{1}{3\tan^3 x} + c$$

(4

5) $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^9 x} = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^9 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^9 x}dx - \int \frac{\sin x}{\cos^9 x}dx$$
$$= \frac{1}{8\cos^8 x} - \frac{1}{6\cos^6 x} + c$$

6) $$\left|\csc^4 x.\cot^7 x dx - \right|\csc^2 x(\cot^2 x - 1)\cot^7$$
$$= \int \cot^9 x.cse^2 x dx - \int \cot^7 x.cse^2 x d\, x$$
$$= -\frac{\cot^{10} x}{10} + \frac{\cot^8 x}{8} + c$$

7) $$\int \cos x \sec^2(\sin x)dx = \int \frac{\sin x \cot x}{\cos^2 x}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x}dx = -\frac{1}{2\cos x} + c$$

8) $$\int \sin^3 2x.\cos^5 2x\, dx = \int \sin 2x(1-\cos^2 2x)\cos^5 2x\, dx$$
$$= \int \cos^5 2x.\sin 2x\, dx - \int \cos^7 2x.\sin 2x\, dx$$
$$= -\frac{1}{12}\cos^6 2x + \frac{1}{16}\cos^8 2x + c$$

9) $$\int \frac{\tan x(1+\tan x)^{10}}{\cos^2 x}dx = |u(1+u)^{10} du$$
$$\left(u = \tan x \Rightarrow du = \frac{dx}{\cos^2 x}\right)$$
$$= \int \left((u+1)^{11} - (u+1)^{10}\right)du = \frac{(\tan x + 1)^{12}}{12} - \frac{(\tan x + 1)^{11}}{11}$$

10) $$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x + 2\cos + 1} = \int \frac{\sin x\,dx}{(\cos x + 1)^2}$$

$$(u = \cos x + 1 \quad \Rightarrow \quad -du = \sin x\,dx)$$

$$= -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\cos x + 1} + c$$

(2) فرض کنید $In = \left| \tan^n x\,dx \right.$. یک فرمول بازگشتی برای محاسبه In بیابید, I_4 و I_6 را محاسبه کنید.

حل)

$$In = \int \tan^{n-2} x \,.\, \tan^2 x\,dx = \int \tan^n x\left(\sec^2 x - 1\right)dx = \tan x$$

$$= \int \tan^{n-1} x \,.\, \tan^2 x\,dx - \int \tan^{n-2} x\left(\sec^{n-2} x - 1\right)dx$$

$$= \frac{\tan^{n-1}}{n-1} - I_{n-2}6 + c$$

$$\Rightarrow \qquad In + I_{n-2} = \frac{\tan^{n-1}}{n-1} + c$$

$$I_2 = \int \tan^3 x\,dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right)dx = \tan x - x$$

$$I_4 = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c$$

$$I_6 = \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c$$

(3) معادله دسته منحنی هایی رابیابید که ضریب زاویهخطوط مماس در هر نقطـه (x, y)

از آن برابر $-\frac{\bar{x}}{y}$ باشد.

حل)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \qquad \Rightarrow \qquad ydy=-xdx$$

$$\Rightarrow \qquad \int ydy=-\int xdx+c$$

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}=c \qquad \Rightarrow \qquad x^2+y^2=2c$$

معادله دسته مخفی‌ها، دوایر بر مرکز مبدأ مختصات است.

(4) معادله مخفی را بیابید که از نقطه $(2\ ,\ 9)$ گذشته و معادله ضریب زاویه مماس برخی $3x^2$ باشد.

$$y=3x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y=\int 3x^2dx+c$$

$$y=x^3+c$$

$$9=8+c \qquad \Rightarrow \qquad c=1$$

$$y=x^3+1$$

حل)

(5) معادله $y'-2x=0$ را حل کنید.

$$y'=2x \ \Rightarrow \qquad y=\int 2x+c$$

$$\Rightarrow \qquad =x^2+c$$

حل)

(6) مشتق تابعی برابر $\sqrt{x+3}$ است. هرگاه مقدار به ازای $x=1$ برابـر 1 باشـد, تـابع را بیابید.

$$y' = \sqrt{x+3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \sqrt{x+3} + c$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} \; + \; c$$

$$(1 \; , \; 1) \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{2}{3} \times 4 \times 2 \times c \; \Rightarrow \quad c = -\frac{13}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} \quad -\frac{13}{3}$$

حل)

(7) هر یک از انترالهای زیر را حل کنید.

$$1) \qquad \int \frac{\sin x \; dx}{(1+\cos x)^2} = -\frac{1}{1+\cos x} + c$$

$$\int \cos^6 x \; dx = \frac{1}{8}\int (1+\cos 2\,x)^3 \; dx$$

$$2) \qquad = \frac{1}{8}\int \left(1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x\right) \, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int dx + 3\int \cos 2x \, dx + \frac{3}{2}\int (1+\cos 4x) dx + \int \cos 2x \left(1-\sin^2 2x\right) \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(x + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{6} \right) + c$$

$$3) \qquad \int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \int \sin x \left(1-\cos^2 x\right)^2 \cos^2 x dx$$

$$= \int \sin x \, . \cos^2 x \; dx - 2\int \sin x \; . \; \cos 4x \; dx + \int \sin x \; . \; \cos^6 x \; dx$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

4) $$\int \frac{\cos^3 3x}{\sqrt[3]{\sin 3x}}dx = \int \cos 3x\left(1-\sin^2 3x\right)\sin^{-\frac{1}{3}} 3x\,dx$$

$$= \int \sin^{-\frac{1}{3}} 3x \ . \ \cos 3x\,dx - \int \sin^{\frac{5}{3}} x \ . \ \cos 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{\frac{2}{3}} 3x + \frac{1}{8}\sin^{\frac{8}{3}} 3x + c$$

5) $$\int \sin 3y \cos 3y \ dy = \frac{1}{6}\sin^2 3y + c$$

6) $$\int \cos t \ . \ \cos 3t \ dt = \frac{1}{2}\int(\cos 2t + \cos t)dt$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}\sin t + c$$

7) $$\int \sin x \ . \ \sin 3x \ . \ \sin 5x = \int \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos x)\sin 5x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 5x \ . \cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin 5x \ . \cos x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\sin\frac{7}{2}x + \sin\frac{3}{2}x\right)dx - \frac{1}{2}\int(\sin 3x + \sin 2x)dx$$

$$= \frac{-1}{7}\cos\frac{7}{2}x - \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}x + \frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

8) $$\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\int (2\sin x\cos x)^4 dx$$
$$= \frac{1}{16}\int \sin^4 2x\, dx = \frac{1}{32}\int (1-\cos 4x)^2$$
$$= \frac{1}{32}\int \left(1-2\cos 4x+\cos^2 4x\right)dx$$
$$= \frac{1}{32}\left(x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\sin 8x\right)+c$$

9) $$\int \sqrt{1+\sin^2(x-1)}\ .\ \sin(x-1)\cos(x-1)dx$$
$$\left(u=1+\sin^2(x-1) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{2}=\sin(x-1)\cos(x-1)dx\right)$$
$$I=\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ \ du=\frac{1}{3}u\sqrt{u}+c=\frac{1}{3}\left(1+\sin^2(x-1)\right)\sqrt{1+\sin^{2(x-1)}}+c$$

10) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x\ .\ \sin^2 x}=4\int \frac{dx}{(2\sin x\cos x)^2}=4\int \frac{dx}{\sin^2 2x}=-2\cot 2x+c$$

11) $$\int \sqrt{-+\sin^2(x-1)}\qquad .\ \sin(x-1)\cos(x-1)\ dx$$
$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\left(\cos\frac{13}{4}x+\cos\frac{7}{4}x+\cos\frac{11}{4}x+\cos\frac{9}{4}x\right)dx$$
$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{13}\sin\frac{13}{4}+\frac{4}{7}\sin\frac{7}{4}x+\frac{4}{11}\sin\frac{11}{4}x+\frac{4}{9}\sin\frac{9}{4}x\right)+c$$

12) $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 3x}dx + \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 x}dx$

$= \frac{1}{3}\tan 3x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos 3x} + c$

13) $\int \frac{(\sin x + \cos x)}{\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)}}$ $\qquad u = \sin x - \cos x \Rightarrow du = (\cos x + \sin x)_{dx}$

$= \int \frac{dy}{\sqrt[3]{u}} = \int u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{2}{3}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + c$

14) $\int x^{n-1} \sin x^n dx$ $\qquad u = x^n \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{n} = x^{n-1}\, dx$

$= \frac{1}{n}\int \sin u\, du = -\frac{1}{n}\cos x^n + c$

15) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} \quad = \int \sin x \frac{1-\cos x^n x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} \quad dx$

$= \int \cos^{-\frac{3}{5}} x \,.\, \sin x\, dx - \int \cos^{\frac{13}{5}} x \,.\, \sin x\, dx$

$= -\frac{5}{2}\cos^{\frac{2}{5}} x + \frac{5}{18}\cos^{\frac{18}{5}} x + c$

16) $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)2}dx = -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} + c = \frac{1}{1+\cos x} + c$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sin^2 \sqrt{x}}$ $\quad , \quad u = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$I = 2\int \frac{du}{\sin^2 u} = -2\cot(\sqrt{x}) + c$

18) $$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}, \qquad u = x^2 \;\Rightarrow\; \frac{du}{2} = x\,dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{2}\tan x^2 + c$$

19) $$\int \sin x(1+\cos x)^5\,dx = -\int u^5 du = -\frac{(1+\cos x)^6}{6} + c$$

20) $$\int \sin 2x\sqrt{2+\sin^2 x}\;\,dx = \int \sqrt{u}\;\,du = \frac{2}{3}(1+\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x} + c$$

فصل ششم

انـتـگرال مـعین

6-1-7 تکریم صفحه 364

با استفاده تعریف حد, انتگرال تابع $f(x)=x^2$ را در فاله $[0\ ,\ 1]$ بیابیید.

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \lim \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

حل)
$$= \lim \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

6-2-2 تمرین صفحه 366.

در شی تساوی‌های زیر ثالث کنید.

الف)
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

حـل) اگـر $\{x_0\ ,\ x_1\ ,\ldots ,\ x_8\}$ افـرازی از $[a\ ,\ b]$ باشـدآنگاه $\Delta y_i=\Delta x_i$ بـرای بـازه $[b\ ,\ a]$ به کار می‌رود پس

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{D}_i)\Delta x_i = -\lim \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{D}_i)\Delta y_i$$
$$= \int_b^a f(x)\,dx$$

ب)
$$\int_b^a f(x)\,dx = 0$$

حل) طبق خاصیت الف

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx$$
$$\Rightarrow\ 2\int_b^a f(x)\,dx = 0 \qquad \Rightarrow\ \int_b^a f(x)\,dx = 0$$

6-2-5 تمرین صفحه 368

قضیه 6−2−4 . فرض کنید f در بازه‌ای شامل نقاط c , b , a پیوسته باشد در این صورت:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

اثبات) اگر $a<c<b$ ، اثبات تساوی از قفضیه 6−2−3 حاصل می‌شود.

بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید $a<c<b$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx-\int_b^c f(x)\,dx$$

$$=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

6-2-7. تمرین صفحه 369

قضیه 6-2-4. اگر f و g بر $[a , b]$ پیوسته باشد و برای ره $x\in[a , b]$ ،

$f(x)\geq g(x)$ آنگاه $\int_a^b f(x)\ fx\geq\int_a^b g(x)\ fx$

اثبات.

$$f(\mathbf{D}_i) \geq g(\mathbf{D}_i) \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{D}_i)\,\Delta x_i \geq g(\mathbf{D}_i)\,\Delta x_i$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} f(\Im_i)\Delta x_i \geq \sum_{i=1}^{n} g(\Im_i)\Delta x_i$$

$$\Rightarrow \quad \lim \sum_{i=1}^{n} f(\Im_i)\Delta x_i \geq \sum_{i=1}^{n} g(\Im_i)\Delta x_i$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx$$

(2) **اگر** f **بر** $[a , b]$ انتگرال پذیر باشد و برای هر x در فاصله $[a , b]$ ،

$f(x) \geq 0$ انگاه $\int_a^b f(x)bx \geq 0$

اثبات : طبق قضیه $4-2-6$ داریم

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b 0\, dx = 0$$

(3) اگر f روی $[a\ ,\ b]$ پیوسته باشد و برای هر $x \in [a\ ,\ b]$ ، $f(x) < 0$ انگاه:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

حل)

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b 0\ dx = 0$$

12-2-6 تمرین صفحه 371.

(1) حد $\lim\limits_{n \to +\infty} 8\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+....+\frac{n^2}{n^3}\right)$ را به صورت یک انتگرال معین بنویسید.

حل)

$$\text{حد} = 8\lim \sum_{i=n}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = 8\int_0^1 x^2 dx$$

(2) حد $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i^2}$ را به صورت انتگرال معین بنویسید.

حل)

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i^2} = \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \bullet \frac{n^2}{i^2} = \lim \frac{n}{i^2} = \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} . \frac{n}{(\frac{i}{n})}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2}\ dx$$

(3) با استفاده از تعریف انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

الف)

$$\int_{-1}^{1} |x|\ dx$$

حل)

$$\int_{-1}^{1} |x|\ dx = 2\int_0^1\ dx = 2\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right) = 2\lim \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$
$$= 2\ \lim \frac{n(n+1)}{2n^2} = 1$$

ب)

$$J = \int_3^5 [x]\ dx$$

حل) می‌دانیم $\int_a^b k dx = k(b-a)$ پس

$$J = \int_3^4 [x]\ dx + \int_4^5 [x]\ dx = \int_3^4 3 dx + \int_4^5 4\ dx$$
$$= 3(4-3) + 4(5-4) = 3 + 4 = 70$$

(4) اگر تابع f روی $[a\ ,\ b]$ انتگرال پذیر باشد. ثابت کنید که:

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\ dx$$

حل) چون برای هر $x \in [a\ ,\ b]$ داریم: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ طبق قضیه

6 – 2 – 6 داریم:

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \le \int_a^b f(x) \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

پس

$$\left|\int_a^a f(x)\, dx\right| \le \int_a^b f(x)\, dx$$

(5) فاصله‌هایی را معین کنید که مقدار انتگرال‌های داده شده در آن فاصله قرار گیرد.

الف)

$$\int_{-2}^{1} (x+1)^{\frac{3}{2}} dx$$

حل) تابع $f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}$ روی $[-1,1]$ صعودی است پس

$$\max f(x) = f(1) = 2\sqrt{2}$$
$$\max f(x) = f(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \quad \le \int_{-2}^{1} f(x)\, dx \le 2\sqrt{2}\,(2-(-1))$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \int_{-2}^{1} (x+1)^{\frac{3}{2}}\, dx \le 6\sqrt{2}$$

ب)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$$

حل) تابع $f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}$ روی $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ است، چون ترکیب دو تابع صعودی است پس

$$\max\ f(x)=1$$

$$\min\ f(x)=\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}}\times\frac{p}{2}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx\le\frac{\pi}{2}$$

ج)

$$\int_1^4 |x-2|\,dx$$

$$\max |x-2|=|4-2|=2$$
$$\min |x-2|=|2-2|=0$$

$$\Rightarrow \qquad 0\le\int_1^4 |x-2|\,dx\le 6$$

د)

$$\int_{-5}^{2}\frac{x+5}{x-3}\,dx$$

حل) $f(x)=\dfrac{x+5}{x-3}$ نزولی است پس

$$\max\ f(x)=f(-5)=0$$
$$\min\ f(x)=f(2)=-7$$

$$\Rightarrow \qquad -49\le\int_{-5}^{2} f(x)\,dx\le 0$$

(6) بدونه محاسبه انتگرال نشان دهید $\int_0^1 x^2dx \le \int_0^1 x\,dx$ و $\int_0^1 x\,dx\le\int_1^2 x^2\,dx$

حل) تابع $f(x)=x-x^2$ را در نظر بگیرید داریم:

$$0 \le x \le 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x \ge x^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 x\,dx \ge \int_0^1 x^2\,dx$$

$$0 \ge 1 \qquad \Rightarrow \quad f(x) \le 0 \quad \Rightarrow \quad x \le x^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^2 x\,dx \le \int_0^2 x^2\,dx$$

(7) اگر f روی $[-1,2]$ پیوسته باشد نشان دهید:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{-1} f(x)\,dx = 0$$

حل) داریم:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x) + \int_0^2 f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_1^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{-1}^{2} f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx - \int_1^0 f(x)dx - \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_2^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{-1} f(x)dx = 0$$

(8) اگر f بر $[a\ ,\ b]$ پیوسته و $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ ، نشان دهید حداقل عددی نظیر a در فاصله $[a\ ,\ b]$ قرار دارد به طوری که $f(x) = 0$.

حل) طبق قضیه مقدار میانگین برای انتگرال داریم:

$$\min\ f(x) \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le \max\ f(x)$$

$$\min\ f(x) \le \rightarrow \quad \bullet \quad \leftarrow \le \max\ f(x)$$

پس

حال طبق قضیه مقدار میانی a وجود دارد که $f(a) = 0$ باشد.

(9) مثالی از یک تابع چنان ارائه دهید که ناپیوسته و قضیه مقدار میانگین برای انتگرال ما

الف) برقرار نباشد. ب) برقرار باشد.

حل ب) تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0 \quad \Rightarrow \frac{\int_{-1}^{1} f(x)dx}{2}=0=f(0)$$

(10) اگر f روی $[-1\ ,\ 4]$ انتگرال‌پذیر باشد و مقدار متوسط تـابع f روی $[-1\ ,\ 4]$ برابر 3 باشد، مقدار $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ را بدست آورید.

حل)

$$\frac{\int_{-1}^{4} f(x)\,dx}{5}=3 \qquad \Rightarrow \int_{-1}^{4} f(x)\,dx=15$$

$6-3-13$ تمرین صفحه 378

1) فرض کنید f بر $[-a\ ,\ a]$ پیوسته و فرد باشدو ثابت کنید.: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

حل)

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx&=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx\\&=\int_{a}^{0} f(-x)\,(-dx)+\int_{0}^{a} f(x)\,dx\\&=\int_{0}^{a} f(-x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx\\&=-\int_{0}^{a} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=0\end{aligned}$$

2) در تمرین 1 اگر f زوج باشد, ثابت کنید که:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{a}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

3) انتگرالهای زیر را حل کنید:

الف)
$$I = \int_{0}^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\,dx$$

اگر قرا دهیم $u = \frac{p}{2} - x$ پس $du = -dx$ و داریم

$$I = \int_{\frac{p}{2}}^{0} \frac{\sqrt{\sin}}{\sqrt{\sin u} + \sqrt{\cos u}}(-du) = \int_{0}^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\sin u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}}\,du$$

$$I + I = 2I = \int_{0}^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}}\,du + \int_{0}^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}}\,du$$

$$= \int_{0}^{\frac{p}{2}} du = \frac{p}{2} \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{p}{2}$$

ب)
$$I = \int_{0}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x}\,dx$$

حل) اگر قرار دهیم $u = \frac{p}{2} - x$ پس $du = -dx$ و داریم:

$$I=-\int_{\frac{p}{2}}^{0}\frac{\cos^m u}{\cos^m u+\sin^m u}dx=\int_{0}^{\frac{p}{2}}\frac{\cos^m u}{\cos^m u+\sin^m u}du$$

$$I+I=2I=\int_{0}^{\frac{p}{2}}\frac{\sin^m u}{\sin^m u+\cos^m u}du+\int_{0}^{\frac{p}{2}}\frac{\cos^m u}{\cos^m u+\sin^m u}du=\int_{0}^{\frac{p}{2}}du=\frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad I=\frac{p}{4}$$

(4) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف)

$$F(t)=\int_{-2}^{\sqrt{t}}\frac{\sin x}{1+\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$F'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}.\frac{\sin\sqrt{t}}{1+\sqrt{1+t}}$$

ب)

$$F(t)=\int_{a}^{g} f(x)\,dx$$

$$F'(t)=g'(t)\,f\,(g(t))$$

ج)

$$F(t)=\int_{-x}^{x}|t|\;dt$$

$$F(x)=2\int_{0}^{x}tdt \qquad \Rightarrow \qquad F'(x)=2x$$

د)

$$F(x)=\int_{-x}^{x}\frac{dt}{3+t^4}$$

$$F(x)=2\int_{0}^{x}\frac{dt}{3+t^4} \qquad \Rightarrow \qquad F'(x)=\frac{2}{3+t^4}$$

(5) حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x^2}\sin\sqrt{t}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{3}$$

(6) در توابع ضمنی زیر $\frac{dy}{dx}$ را حساب کنید.

الف)
$$\int_0^y \cos^2 t dt + \int_0^x \sin^2 t dt = 0$$

حل)
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sin^2 t dt}{\frac{d}{dx}\int_0^y \cos^2 t dt} = -\frac{2x\sin^2 x^2}{\cos^2 y}$$

ب)
$$\int_{\frac{p}{2}}^x \sqrt{3-2\sin^2 z}\ dz + \int_0^y \cos t dt = 0$$

حل)
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}\int_{\frac{p}{2}}^x \sqrt{3-2\sin^2 z}\ dz}{\frac{d}{dy}\int_0^y \cos t dt} = -\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}$$

(7) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^p \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

حل) قرار می‌دهیم: $u = x - \frac{p}{2}$ پس $du = dx$ و

$$I = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\left(u+\frac{p}{2}\right)\cos u}{1+\sin^2 u} du$$

$$= \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{u\cos u}{1+\sin^2 u} du + \frac{p}{2}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\cos u}{1+\sin^2 u} du$$

$$=p\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{\cos u}{1+\sin^2 u}\,du=p\ \ Arc\tan(\sin u)\Big|_0^{\frac{p}{2}}$$

$$=\frac{p^2}{4}$$

(8) فرض کنید K عددی صحیح باشد ثابت کنید: $I=\int_0^p \frac{\sin 2kx}{\sin x}=dx=0$

حل) قرار می دهیم $u=x-\frac{p}{2}$ پس du=dx و

$$I=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{\sin 2k(u+\frac{p}{2})}{\sin(u+\frac{p}{2})}du=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{\sin(2ku+p)}{\cos u}du$$

$$=-\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{\sin 2ku}{\cos}du=0$$

چون تابع زیر انتگرال فرد است.

(9) اگر در انتگرال $I=\int_0^{2p}\frac{dx}{5-2\cos}$ تغییر متغیر x=2t را به کار ببریم داریم

$$I=\int_0^{2p}\frac{dx}{5-2\cos}=\int_0^0\frac{2dt}{(1+t^2)(5-\frac{1+t^2}{1-t^2})}=0$$

واضح است که نتیجه درست نیست زیرا $\frac{1}{5-2\cos}>0$، مورد اشتباه را بیابید.

حل) با تغییر x=2t بازهٔ $[0,2p]$ به $\left[0,\frac{p}{2}\right]$ برده می شود که در حل مورد استفاده قرار نگرفته است.

(10) فرض کیند f(x) دلخواه باشد، ثابت کنید: $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$

حل) تابع f(x) را می توان به صورت $f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$

نوشت که $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ زوج و $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ فرد است. پس

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{f(x)+f(-x)}{2}dx + \int_{-a}^{a} \frac{f(x)-f(-x)}{2}dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} \frac{f(x)+f(-x)}{2}dx + 0 = \int_{0}^{a} (f(x)+f(-x))dx$$

(11) انتگرال $I = \int_{0}^{2p} f(x)\cos x dx$ را با تغییر متغیر t=sinx تغییر دهید.

$$t = \sin x \Rightarrow x = Arc\sin t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\cos x = \sqrt{1-t^2}$$

$$I = \int_{0}^{1} f(Arc\sin t)dt + \int_{1}^{0} f(Arc\sin t)dt + \int_{0}^{-1} f(Arc\sin t)dt + \int_{-1}^{0} f(Arc\sin t)dt$$

(12) درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)dx$

حل) اگر قرار دهیم u=a+b-x آنگاه du=-dx و u(b)=a , u(a)=b است، پس داریم:

$$\int_{a}^{b} f(a+b-x)dx = -\int_{b}^{a} f(u)du = \int_{a}^{b} f(u)du = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

ب) $\int_{0}^{t} f(x)g(t-x)dx = \int_{0}^{t} g(x)f(t-x)dx$

حل) قرار دهید u=t-x پس du=-dx و u(t)=0 , u(0)=t پس داریم:

$$\int_{0}^{t} f(x)g(t-x)dx = -\int_{t}^{0} f(t-u)g(u)du$$

$$= \int_{0}^{t} g(u)f(t-u)du = \int_{0}^{t} g(x)f(t-x)dx$$

ج) $\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^m x dx$

حل) اگر قرار دهیم $u = \frac{p}{2} - x$ پس $u(\frac{p}{2}) = 0 \;,\; u(0) = \frac{p}{2} \;,\; du = -dx$ لذا داریم:

$$\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^m x dx = -\int_{\frac{p}{2}}^{0} \sin^m (\frac{p}{2} - u) du = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^m u du = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^m x dx$$

(13) با توجه به مسأله 12 (ج) انتگرال های $\int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx$ و $\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx$ را محاسبه کنید.

حل) طبق مسأله قبل داریم:

$$\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{p}{2}} (\sin^2 + \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{p}{2}} dx = 2\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx = 2\int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx = \frac{p}{2}$$

(14) درستی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\int_0^{p} f(\sin x) dx = 2\int_0^{\frac{p}{2}} f(\sin x) dx$

حل)

اگر قرار دهیم $u = \frac{p}{2} - x$ آنگاه $u(p) = -\frac{p}{2} \;,\; u(0) = \frac{p}{2} \;,\; du = -dx$ پس

$$\int_0^{p} f(\sin x) dx = -\int_{\frac{p}{2}}^{-\frac{p}{2}} f(\cos u) du = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(\cos u) du = 2\int_0^{\frac{p}{2}} f(\cos x) dx$$

علت آخری این است که f(cosu) تابعی زوج است.

ب) $$\int_0^p xf(\sin x)dx = \frac{p}{2}\int_0^p f(\sin x)dx$$

حل)

اگر قرار دهیم $u = \frac{p}{2} - x$ داریم $u(p) = -\frac{p}{2}\ ,\ u(0) = \frac{p}{2}\ ,\ du = -dx$ ، لذا داریم:

$$\int_0^p xf(\sin x)dx = -\int_{\frac{p}{2}}^{-\frac{p}{2}} (\frac{p}{2} - u) f(\sin(\frac{p}{2} - u) = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{p}{2} f(\cos u))du$$

$$= \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} uf(\cos u)du = p\int_0^{\frac{p}{2}} f(\cos x)dx$$

چون تابع $f(\cos a)$ فرد و تابع $f(\cos u)$ زوج است.

(15) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^p \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$$

حل)

$$I = \int_0^p \sqrt{\sin^2 x}dx = \int_0^p \sqrt{\sin x}dx$$

$$= -\cos\Big|_0^p = 2$$

(16) هر یک از انتگرال های زیر را حساب کنید.

الف) $$\int_{-L}^{L} \cos\frac{mp}{L}xdx = 2\int_0^L \cos\frac{mp}{L}x\,dx = \frac{2L}{mp}\sin\frac{mp}{L}x\Big|_0^L = 0$$

ب) $\int_{-L}^{L} \sin \frac{mp}{L} x dx = 0$ تابع فرد است

ج) $\int_{-L}^{L} \cos \frac{mp}{L} x = \sin \frac{mp}{L} x dx = 0$ چون تابع فرد است.

(17) اگر $G(x) = \int_1^x t dt \ , \ F(x) = \int_0^x u du$ ثابت کنید $F(x) - G(x) = \frac{1}{2}$

حل)

$$F(x) = \int_0^x u du$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = \int_0^1 u du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$G(x) = \int_1^x u du$$

(18) درستی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}) = \frac{1}{2}$

حل)

$$\text{حد} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} (\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n})$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} (\frac{i}{n}) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

ب) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n\to+\infty} (\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots \frac{n}{n^2+n^2}$

حل)

$$\text{حد} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\ldots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)$$

$$= \lim \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{p}{4}$$

$$\frac{2}{p} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{p}{n}+\sin\frac{2p}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)p}{n}\right)$$

چ)

حل)

$$\text{حد} = \frac{1}{p}\lim\sum_{i=1}^{n}\frac{p}{n}\sin p\,(\frac{i}{n}) = \frac{1}{p}\int_0^p \sin x dx = -\frac{1}{p}\cos x\Big|_0^p = \frac{2}{p}$$

(19) فرض کنید $B(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$. اولاً تساوی B(m,n)=Bn,m) را ثابت کنید، ثانیاً ثابت کنید که

$$B(m,n) = 2\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2m+1}x.\cos^{2n+1}x dx$$

.

حل) اولاً اگر قرار دهیم u=1-x پس $du=-dx$, $u(0)=1$, $u(1)=0$ پس داریم:

$$B(m,n) = -\int_0^1 (1-u)^m u^n du = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx = (n,m)$$

ثانیاً: اگر قرار دهیم $x=\sin^2 t$ آنگاه $dx = 2\sin t\cos dt, (1-x)=\cos^2 t$ و کرانها به $\left[0,\frac{p}{2}\right]$ تبدیل می شود. پس داریم:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2m}t.\cos^{2n}t.2\sin t\cos dt = 2\int_0^{\frac{p}{2}}\sin^{2m+1}t.\cos^{2n+1}tdt$$

(20) با فرض $x = 6\cos q$, $y = 2\sin q$ ، مطلوب است، محاسبهٔ $I = \int_3^6 xy\,dx$

حل) $dx = -6\sin q\,dq$ ، اگر $x = 3$ آنگاه $q = \frac{p}{6}$

اگر $x = 6$ آنگاه $q = 0$

$$\Rightarrow I = \int 6\cos q.2\sin q.(-6\sin q)dq = 72\int \sin^2 q.\cos q dq = \frac{72}{3}\sin^3 q\Big|_0^{\frac{p}{6}} = 24(\sin^3\frac{p}{6} - 0) = \frac{24}{8} = 3$$

فصل هفتم

تـو ابـع غیر جبری

27ـ 7 تمرین صفحهٔ387

مشابه آنچه در تعریف $\sin^{-1}$ بیان شد، تابع $\cos^{-1}$ را تعریف و سپس ثابت کنید

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

حل) تابع y=cosx روی $[0,p]$ نزولی است پس وارونه پذیر است

$$Cosx:[0,p]\to[-1,1]$$

$$Cos^{-1}x:[-1,1]\to[0,p]$$

برای محاسبه مشتق داریم: $y=\cos^{-1}x \Leftrightarrow x=\cos y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

7ـ2ـ25. تمرین صفحهٔ.394

1ــ ثابت کنید هرگاه $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{p}{2}$, $0\le x\le 1$ در مورد $-1\le x\le 0$ تساوی بالا چگونه بیان می شود؟

حل)

$$y=\sin^{-1}x\Rightarrow x=\sin y=\cos(\frac{p}{2}-y)\Rightarrow \cos^{-1}x=\frac{p}{2}-y$$

$$\Rightarrow y+\cos^{-1}x=\frac{p}{2}\Rightarrow \sin^{-1}x+\cos^{-1}=\frac{p}{2}$$

این تساوی برای هر $-1\le x\le 1$ برقرار است.

2ـ $y=\sin^{-1}\frac{1}{2}$ مفروض است، مطلوب است:

Cscy , secy , coty , tany , cosy

حل) توجه کنید $y = \frac{p}{6}$

$$\cos y = \cos\frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \tan y = \tan\frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot y = \cot\frac{p}{6} = \sqrt{3} \quad , \quad \sec y = \frac{1}{\cos y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc y = \frac{1}{\sin y} = 2$$

(3) در تمرین های زیر مقدار دقیق کمیت داده شده را پیدا کنید.

الف)

$$tg(\sec^{-1}(\frac{5}{3}) + \csc^{-1}(-\frac{13}{12})) = tg(\cos^{-1}(\frac{3}{5}) - \sin^{-1}(-\frac{12}{13})) = \frac{\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5}) - \sin^{-1}(-\frac{12}{13}))}{\cos(\cos^{-1}(\frac{3}{5}) - \sin^{-1}(-\frac{12}{13}))}$$

$$= \frac{\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5})\cos(\cos^{-1}(\frac{3}{5})) - \cos(\sin^{-1}(\frac{12}{13}))\sin(\sin^{-1}(-\frac{12}{13}))}{\cos(\cos^{-1}(\frac{3}{5})) - \cos(\sin^{-1}(\frac{12}{13})) + \sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5}))\sin(\sin^{-1}(-\frac{12}{13}))}$$

$$= \frac{\frac{4}{5}\times\frac{3}{5} - \frac{5}{13}\times\frac{12}{13}}{\frac{3}{5}\times\frac{5}{13} - \frac{4}{5}\times\frac{12}{13}} = \frac{\frac{12}{25} - \frac{60}{169}}{\frac{15}{65} - \frac{48}{65}}$$

ب)

$$\sin(\cos^{-1}(-\frac{2}{3}) + 2\sin^{-1}(-\frac{1}{3})) = \sin(p - \cos^{-1}(\frac{2}{3}) - 2\sin^{-1}(\frac{1}{3})) = \sin(\cos^{-1}(\frac{2}{3}) + 2\sin^{-1}(\frac{1}{3}))$$

$$= \sin(\cos^{-1}(\frac{2}{3}))\cos(2\sin^{-1}(\frac{1}{3})) + \cos(\cos^{-1}(\frac{2}{3}))\sin(2\sin^{-1}(\frac{1}{3}))$$

$$= \sqrt{1-\frac{4}{9}} \times (2(\sqrt{1-\frac{1}{9}})^2 + 1) + \frac{2}{3}\times 2\times\frac{1}{3}\times\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}\times(\frac{16}{9}+1) + \frac{4}{9}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ج)

$$\cos(\sin^{-1}(-\frac{1}{2})+\sin^{-1}(\frac{-1}{4}))=\cos(-\frac{p}{6}-\sin^{-1}(\frac{1}{4}))=\cos\frac{p}{6}\cos(\sin^{-1}(\frac{1}{4}))$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{1-\frac{1}{16}}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{1}{8}=\frac{3\sqrt{5}-1}{8}$$

(4) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف)

$$f(x)=x^2\sin^{-1}(x^2)$$
$$f'(x)=2x\sin^{-1}(x^2)+\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}$$

ب)

$$f(x)=\sin^{-1}(\cos x)$$
$$f'(x)=\frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-1$$

د)

$$f(x)=\sqrt{x}\cos^{-1}x^2+\sin^{-1}\sqrt{x}$$
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos^{-1}x^2+\frac{-2x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ج)

$$f(x)=3\sec^{-1}\frac{2}{x}+\csc^{-1}2x$$

$$f(x)=3\cos^{-1}\frac{x}{2}+\sin^{-1}\frac{1}{2x}$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}.\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$$

هـ)

$$f(x)=x(\sec^{-1}2x)^2 \Rightarrow f(x)=x(\cos^{-1}\frac{1}{2x})^2$$

$$f'(x)=(\cos^{-1}(\frac{1}{2x}))^2-2x(\frac{-1}{2x^2})\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}}=(\cos^{-1}(\frac{1}{2x}))^2+\frac{2}{\sqrt{4x^2-1}}$$

و)

$$f(x)=\csc^{-1}\sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x)=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})^2$$

$$f'(x)=\frac{\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}}}=-\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

(5) تساوی های زیر را تحقیق کنید.

$$A=\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$$

که در آن $\left|\sin^{-1}x+\sin^{-1}y\right|\le\frac{p}{2}$

حل)

$$\sin A = \sin(\sin^{-1} y) = \sin(\sin^{-1} x)\cos(\sin^{-1} y) + \sin(\sin^{-1} y)\cos(\sin^{-1} x)$$
$$= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \Rightarrow A = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

ب) $tg^{-1}x + tg^{-1}y = tg^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

حل)

$$tg(tg^{-1}x + tg^{-1}y) = \frac{tg(tg^{-1}x) + tg(tg^{-1}y)}{1 - tg(tg^{-1}x).tg(tg^{-1}y)} = \frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow tg^{-1}x = tg^{-1}y + tg^{-1}\frac{x+y}{1-xy}.$$

(6) مقادیر زیر را با توجه به تمرین 5 تعیین کنید.

الف $\sin^{-1}\frac{4}{5} - \sin^{-1}\frac{3}{5}$

حل)

$$\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}(-\frac{3}{5}) = \sin^{-1}(\frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{9}{25}} - \frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sin^{-1}(\frac{16}{25} - \frac{9}{25}) = \sin^{-1}(\frac{7}{25})$$

ب) $A = tg^{-1}\frac{1}{3} + tg^{-1}\frac{1}{4} + tg^{-1}\frac{2}{9}$

حل)

$$A = tg^{-1}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{12}} + tg^{-1}\frac{2}{9} = tg^{-1}\frac{7}{11} + tg^{-1}\frac{2}{9} = tg^{-1}\frac{\frac{7}{11}+\frac{2}{9}}{1-\frac{14}{99}} = tg^{-1}\frac{85}{85} = \frac{p}{4}$$

(7) نشان دهید:

$$tg^{-1}x+tg^{-1}\frac{1-x}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & x>-1\\ -\frac{3\pi}{4} & x<-1\end{cases}$$

حل) طبق؟؟؟

(8) عبارت $A=\cot^{-1}(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x})$ را ساده کنید.

حل)

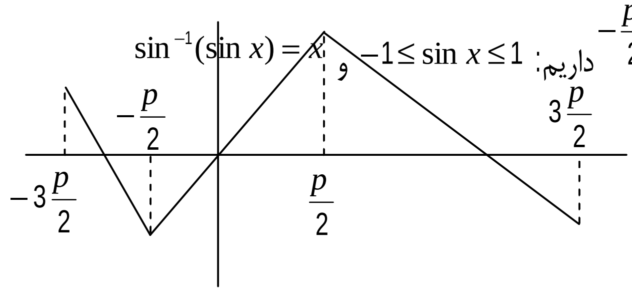
$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$$

$$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\Rightarrow A=\cot^{-1}(\frac{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})})=\cot^{-1}(\cot(x-\frac{\pi}{4}))=x-\frac{\pi}{4}$$

(9) تابع $f(x)=\sin^{-1}(\sin x)$ را رسم و نشان دهید دورهٔ تناوب آن 2π است.

حل) به ازای $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ داریم: $-1\le\sin x\le 1$ و $\sin^{-1}(\sin x)=x$

س



طبق شکل دو فاصله های به طول 2π منحنی تکرار می شود.

(10) انتگرال های زیر را حل کنید.

$$1)\int_{-\frac{3}{7}}^{0}\frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}}=\frac{1}{7}\sin^{-1}(\frac{7x}{6})\Big|_{-\frac{3}{7}}^{0}=-\frac{1}{7}\sin^{-1}(\frac{-1}{2})=\frac{1}{7}\times\frac{p}{6}$$

$$2)\int_{\frac{5\sqrt{2}}{3}}^{\frac{10}{3}}\frac{dx}{x\sqrt{9x^2-25}}=\frac{1}{3}\sec^{-1}(\frac{3x}{5})\Big|_{\frac{5\sqrt{2}}{3}}^{\frac{10}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\sec^{-1}(2)-\frac{1}{3}\sec^{-1}(\sqrt{2})=\frac{1}{3}\cos^{-1}(\frac{1}{2})-\frac{1}{3}\cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{p}{9}-\frac{p}{12}=\frac{p}{36}$$

$$3)\int\frac{3dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}=\int\frac{3dx}{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-1}}$$

$$=3\sec^{-1}(x+2)+c$$ س

$$4)\int\frac{\sec^2 dx}{9+tg^2x}=\frac{1}{3}tg^{-1}(\frac{tgx}{3})+c$$

$$5)\int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\sec^{-1}(x)\Big|_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})-\cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$=\frac{p}{6}-\frac{p}{4}$$

(11) فرض کنید $x>-1$ ثابت کنید:

$$tg^{-1}(\frac{x-1}{x+1})=tg^{-1}x-\frac{p}{4}$$

حل) طبق فرمول تمرین 6 داریم:

$$tg^{-1}x - tg^{-1}(\frac{x-1}{x+1})$$

$$= tg^{-1}\frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-x\frac{1-x}{1+x}} = tg^{-1}\frac{\frac{1+x^2}{1+x}}{\frac{1+x^2}{1+x}} = tg^{-1}1 = \frac{p}{4}$$

(12) نشان دهید که هر گاه $|x|<1$ آنگاه:

$$\sin^{-1}x = tg^{-1}(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}})$$

حل)

$$tg(\sin^{-1}) = \frac{\sin(\sin^{-1}x)}{\cos(\sin^{-1}x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}x = tg^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$$

(13) نشان دهید که

$$tg^{-1}x = \sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$$

$$tg(\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})) = \frac{\sin(\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}))}{\cos(\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}))}$$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = x$$

$$\Rightarrow tg^{-1}x = \sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$$

تمرین صفحهٔ 404

1ـ انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{-2}^{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx=0$$

چون تابع زیر انتگرال فرد است:

$$f(-x)\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x=\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

2. مشتق چهارم $f(x)=x^2\ln x$ را محاسبه کنید.

$$f'(x)=2x\ln x+x$$
$$f''(x)=2\ln x+3$$
$$f'''(x)=\frac{2}{x} \qquad , \qquad f^{(4)}(x)=-\frac{2}{x^2}$$

3. مشتق پنجم $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ را محاسبه کنید.

$$f'(x)=\frac{1-x\ln x}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x}$$
$$f''(x)=-\frac{2}{x^3}-(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x})$$
$$f'''(x)=\frac{6}{x^4}+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x}$$
$$f^{(4)}=\frac{-24}{x^5}-\frac{6}{x^4}-\frac{2}{x^3}-(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x})$$
$$f^{(5)}=\frac{120}{x^6}+\frac{24}{x^5}+\frac{6}{x^4}+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x}$$

حل)

4. با به کار گیری قضیه مقدار میانگین در مشتق نشان دهید که اگر $0<a<b$ آنگاه

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{b}$$

حل) تابع f(x)=lnx روی بازهٔ $[a,b]$ شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست. پس داریم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\Rightarrow\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{c}\quad,\quad a<c<b$$

چون $a<c<b$ پس $\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$ در نتیجه:

$$\frac{1}{b}<\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}<\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$$

5. نشان دهید به ازای هر $x>0$ نامساوی زیر برقرار است:

$$x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$$

حل) تابع $f(t)=\ln(1+t)-t$ روی فاصلهٔ $[0,x]$ شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست پس:

$$0<c<x\quad,\quad f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{\ln(1+x)-x}{x}=\frac{1}{1+c}-1=\frac{-c}{1+c}$$

چون $0<c<x$ پس $-\frac{x}{1+x}<\frac{-c}{1+c}<0$

اگر $x<1$ آنگاه $-\frac{1}{2}x<\frac{-x}{1+x}$

اگر $x>1$ آنگاه $-\frac{1}{2}x<\frac{-x}{1+x}$

پس $-\frac{1}{2}x<\frac{\ln(1+x)-x}{x}<0$

لذا: $x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$

6. انتگرال های معین زیر را محاسبه کنید.

$$1) I=\int_{e^2}^{e^4}\frac{dx}{x\ln x(\ln(\ln x))}$$

$$u=\ln(\ln x)\ \Rightarrow\ du=\frac{dx}{x\ln x}$$

$$\Rightarrow\ I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{du}{u}=\ln u\Big|_{\ln 2}^{\ln 4}=\ln(\ln(\ln 4)-\ln(\ln 2)$$

$$2)\int_0^p\frac{\cos x}{2+\sin x}dx=\ln(2+\sin x)\Big|_0^{\frac{p}{2}}+\ln(2+\sin x)\Big|_{\frac{p}{2}}^{p}$$

$$=\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{2}{3}=0$$

$$3)\int_4^9\frac{dx}{)1+\sqrt{x})\sqrt{x}}\qquad u=1+\sqrt{x}\ \Rightarrow\ 2du=\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$=2\int_3^5\frac{du}{u}=2\ln u\Big|_3^5\ =2\ln\frac{5}{3}$$

$$4)\int_{-3}^{0}\frac{dy}{y^2+3y-4}=\int_{-3}^{0}\frac{dy}{(y+4)(y-1)}=\frac{1}{5}\int_{-3}^{0}(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+4})du$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{y-1}{y+4}\right|\ \Big|_{-3}^{0}=\frac{1}{5}(\ln\frac{1}{4}-\ln 4)$$

$$=\frac{1}{5}\ln\frac{1}{16}$$

$$5)\int_0^1\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int_0^1\frac{dx}{(x-2)(x-3)}=\int_0^1(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2})dx$$

$$=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\ \Big|_0^1=\ln 2-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{4}{3}$$

7. انتگرال های نامعین داده شده را محاسبه کنید.

$$1)\int \frac{1+\ln x}{5+x\ln x}dx \qquad u=5+x\ln x \Rightarrow du=(1+\ln x)dx$$

$$\Rightarrow \ I=\int \frac{du}{u}=\ln(5+x\ln x)+c$$

$$2)J=\int \frac{4\ln^3 x+3}{x(\ln^4 x+3\ln x)}dx$$

$$u=\ln^4 x+3\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}(4\ln^3 x+3)dx$$

$$\Rightarrow J=\int \frac{du}{u}=\ln(\ln^4 x+3\ln x)+c$$

$$3)\int \frac{2x^3}{x^2-4}dx$$

$$u=x^2-4 \Rightarrow du=2xdx \ , \ x^2=u+4$$

$$I=\int \frac{(u+4)}{u}du=\int (1+\frac{4}{u})du=u+4\ln u+c$$

$$(x^2-4)+4\ln(x^2-4)+c$$

8. ثابت کنید به ازای هر $x>0 \ , \ x\neq 1$ داریم:

$$x-1-\ln x>0 \quad , \quad 1-\ln x-\frac{1}{x}<0$$

حل) اگر قرار دهیم $f(x)=\ln x \quad , \quad g(x)=x-1$ آنگاه:

$$x>1 \qquad \left.\begin{array}{l} g(1)=f(1)=0 \\ g'(x)=1>\frac{1}{x}=f'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)<g(x)$$

$$x<1 \qquad g'(x)=1<\frac{1}{x}=f'(x) \Rightarrow f(x)<g(x)$$

درنتیجه $\ln x<x-1$

حال اگر به جای x , $\frac{1}{x}$ قرار دهیم، داریم:

$$\ln\frac{1}{x}<\frac{1}{x}-1 \Rightarrow -\ln x<\frac{1}{x}-1$$

$$\Rightarrow 1-\ln x-\frac{1}{x}<0$$

و از آنجا نتیجه بگیرید: که

$$1-\frac{1}{x}<\ln x<x-1$$

نامساوی اول داریم $\ln x<x-1$ و از نامساوی دوم داریم: $1-\frac{1}{x}<\ln x$

پس : $$1-\frac{1}{x}<\ln x<x-1$$

9. ثابت کنید $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ (بدون استفاده از قاعده هوپیتال)

حل) طبق مسأله قبل اگر به جای x، قرار دهیم x+1، داریم:

$$\frac{x}{+1}<\ln(1+x)<x$$

پس $$\frac{1}{x+1}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1$$

چون داریم: $\lim\frac{1}{x+1}=\lim 1=1$ ، طبق قضیه فشردگی

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

10. ثابت کنید $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (بدون استفاده از هوپیتال)

حل) طبق تمرین 8 داریم: $\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$

دو طرف را بر x تقسیم می کنیم. $\frac{x-1}{x^2} < \frac{\ln x}{x} < \frac{x-1}{x}$ ، از طرفی داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0$$

طبق قضیه فشردگی داریم: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$