

## فصل نهم

مختصات قطبی و  
منحنی‌های قطبی

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۲

تمرین صفحه 456

1. برای هر یک از نقاط زیر، دو مجموعه دیگر از مختصات قطبی همان

نقطه را پیدا کنید که در یکی  $r > 0$  و دیگری  $r < 0$  باشد.

الف)  $(\sqrt{2}, -\frac{p}{4}) : (-, \frac{3p}{4}), (\sqrt{2}, \frac{7p}{4})$

ب)  $(-2, \frac{4p}{3}) : (2, \frac{7p}{3}), (-2, \frac{10p}{3})$

ج)  $(-3, -p) : (3, 0), (-3, p)$

2- مختصات قطبی نقاط زیر را با شرایط  $r > 0$  و  $0 \leq q < 2\pi$  تعیین

کنید

الف)  $(2, 2) : (2\sqrt{2}, \frac{7p}{4})$

ب)  $(-1, -\sqrt{3}) : (2, \frac{4p}{3})$

ج)  $(1, \sqrt{3}) : (2, \frac{p}{3})$

3- معادله قطبی معادلات زیر را بنویسید.

الف)  $x^3 = 4y^2 : r^3 \cos^3 q = 4r^2 \sin^2 q \Rightarrow r = \frac{4 \sin^2 q}{\cos^3 q}$

ب)  $xy = 1 : r^2 \sin q \cos q = 1$

فصل دوم: حد و پیوستگی ۳

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4x$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } & \Rightarrow r^2 = 4r \cos q \\ & \Rightarrow r = 4 \cos q \end{aligned}$$

4- معادلات دکارتی معادلات زیر را بنویسید.

$$\text{الف) } r = 2 \sin 3q = 2(3 \sin q \cos^2 q - \sin^3 q)$$

$$r^4 = 6r \sin q (r \cos q)^2 - 2(r \sin q)^3$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 6yx^2 - 2y^2$$

$$\text{ب) } = \frac{4}{3 - 2 \cos q} \Rightarrow 3r - 2 \cos q = 4$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} - 2x = 4 \Rightarrow 3(x^2 + y^2) = (2x + 4)^2$$

$$3x^2 + 3y^2 = 4x^2 + 16x + 16$$

$$\text{ج) } r^2 = q \Leftrightarrow y + z = \left(\frac{y}{x}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow y = x \tan(x^2 + y^2)$$

تمرین صفحه 462

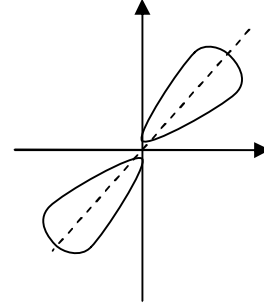
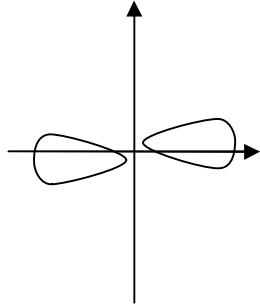
1. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

1)  $r^2 = 9 \sin 2q$

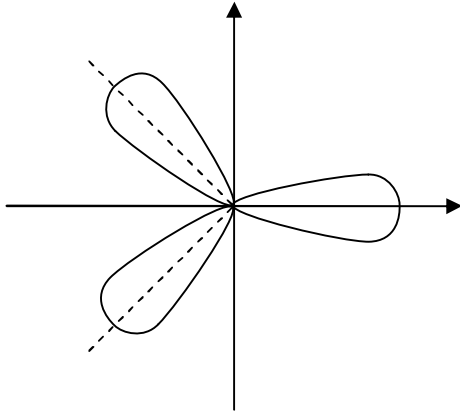
2)  $r^2 = 16 \cos 2q$

حل المسائل رياضى عمومى (١)

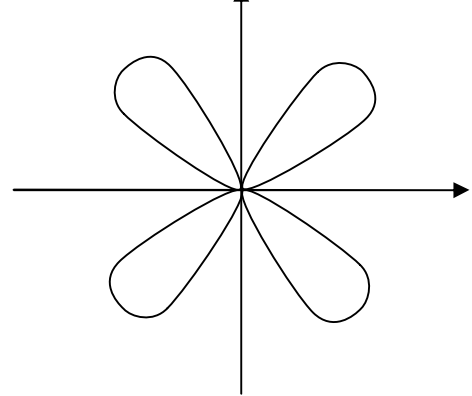
٤



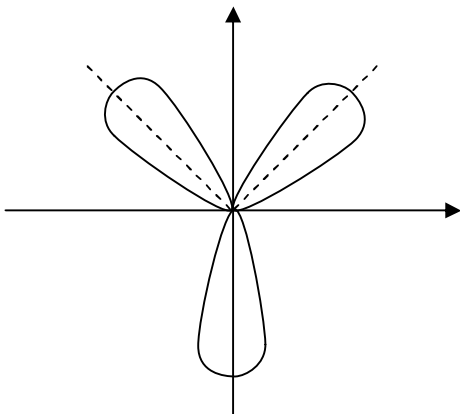
3)  $r = 3\cos 3q$



4)  $r = 4\sin 2q$



5)  $r = 3\sin 3q$

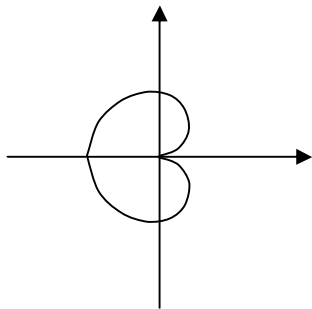


6)  $r = 1 + 2\sin q$

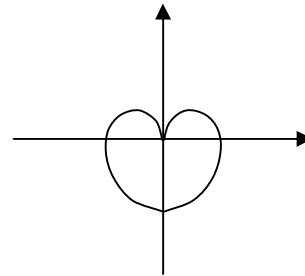
$r = 2\left(\frac{1}{2} + \sin q\right)$

فصل دوم: حد و پیوستگی

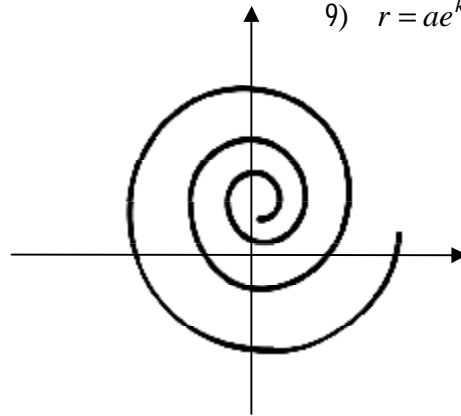
7)  $r = 4(1 - \cos q)$



8)  $r = 3(1 - \sin q)$



9)  $r = ae^{kq}$



حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۶

2. فرض کنید خطی از مبدأ بر خط  $dx+by-c=0$  عمود باشد.

مختصات تقاطع آنها را در مختصات قطبی تعیین کنید.

$$y = x - \frac{d}{b}x + \frac{c}{b}$$

خط مورد نظر به صورت  $y = \frac{d}{b}x$  است. که در مختصات قطبی به

صورت  $q = \text{tg}^{-1}\left(\frac{d}{b}\right)$  مطرح می شود.

$$r \sin q = -\frac{d}{b}r \cos q + \frac{c}{b}$$

$$r = \frac{c}{b \sin q + d \cos q} = \frac{c}{b \sin\left(\text{tg}^{-1}\left(\frac{b}{d}\right)\right) + d \cos\left(\text{tg}^{-1}\left(\frac{b}{d}\right)\right)}$$

$$r = \frac{c}{\frac{b^2}{\sqrt{b^2+d^2}} + \frac{d^2}{\sqrt{b^2+d^2}}}$$

$$r = \frac{c}{\sqrt{b^2+d^2}}$$

3. مسأله 2 را در مورد خط  $\sqrt{3}x+y=6$  حل کنید.

$$q = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{p}{6}$$

$$r = \frac{6}{\sqrt{4}} = 3$$

فصل دوم: حد و پیوستگی ۷

4. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$r = 2\sin q \quad (\text{الف})$$

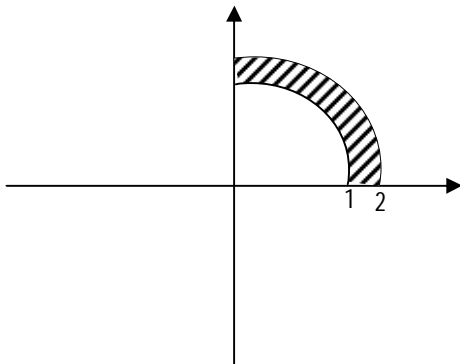
$$\begin{aligned} r = 2\sin q &\Rightarrow r^2 = 2r \sin q \Rightarrow x^2 + y^2 = 2y \\ &\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$r = 2\sin(q + 45^\circ) \quad (\text{ب})$$

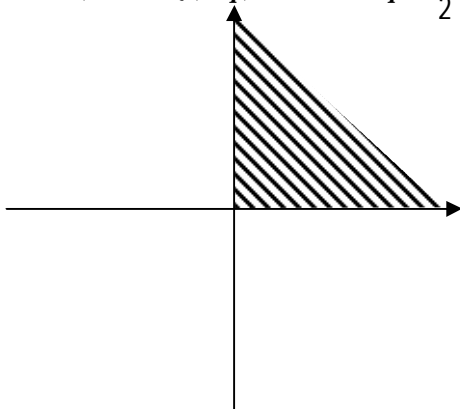
کافی است نمودار قبلی را به اندازه  $45^\circ$  در جهت ساعت دوران دهیم.

5. ناحیه های زیر را در مختصات قطبی نمایش دهید.

$$\text{الف) } D = \{(r, q) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq q \leq \frac{p}{2}\}$$



$$\text{ب) } R = \{(r, q) \mid r \geq 0, 0 \leq q \leq \frac{p}{2}\}$$

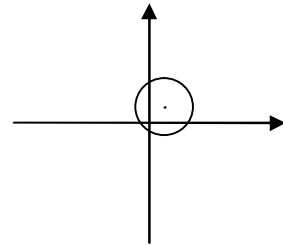


$$ج) P = \{(r, q) \mid 0 \leq r \leq 2 \cos q, -\frac{\pi}{2} \leq q \leq \frac{\pi}{2}\}$$

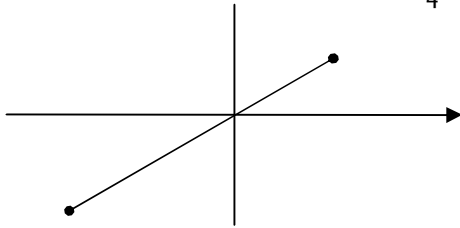
$$0 \leq r \leq 2 \cos q \Rightarrow 0 \leq r^2 \leq 2r \cos q$$

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$$

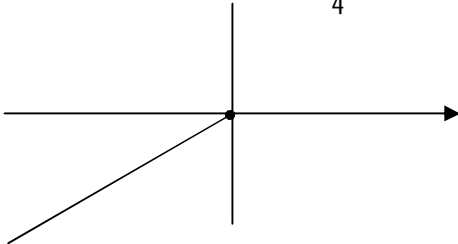
$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$$



$$د) T = \{(r, q) \mid -3 \leq r \leq 2, q = \frac{\pi}{4}\}$$



$$ه) K = \{(r, q) \mid r \leq 0, q = \frac{\pi}{4}\}$$



تمرین صفحه 446

1. نقاط تقاطع نمودارهای داده شده را پیدا کنید.

$$r = 1 - \sin q, r = \cos(2q) \quad (\text{الف})$$

$$q = \frac{p}{4} \Rightarrow r = \cos\left(2 \times \frac{p}{4}\right) = 0$$

$$q = \frac{p}{2} \Rightarrow r = 1 - \sin \frac{p}{2} = 0$$

(حل)

دو منحنی از قطب می گذرند.

$$\cos(2q) = 1 - \sin q \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 q = 1 - \sin q \Rightarrow 2 \sin^2 q = \sin q$$

$$\Rightarrow q = 0, p, q = \frac{p}{6} \text{ و } \frac{5p}{6}$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۱۰

$$r = 2\cos q, r = 2\sin q \quad (\text{ب})$$

$$q = 0 \rightarrow r = 2\sin 0 = 0$$

$$q = \frac{p}{4} \rightarrow r = 2\cos \frac{p}{2} = 0 \quad \text{" قطب روی دو منحنی است$$

$$\cos 2q = \sin q = \cos\left(q - \frac{p}{2}\right) \Rightarrow 2q = 2Kp \pm \left(q - \frac{p}{2}\right)$$

$$\Rightarrow q = 2Kp - \frac{p}{2} \Rightarrow q = -\frac{p}{2}, \frac{3p}{2}$$

$$q = \frac{2kp}{3} + \frac{p}{2} \Rightarrow q = \frac{p}{2}, \frac{2p}{3} + \frac{p}{2}$$

$$r = 1, r^2 = 2\cos q \quad (\text{ج})$$

$r = 1$  از قطب نمی گذرد.

$$1 = 2\cos q \Rightarrow \cos q = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm \frac{p}{3}$$

$$-1 = 2\cos q \Rightarrow \cos q = -\frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}$$

$$r(1 - \sin q) = 3, r = 4(1 + \sin q) \quad (\text{د})$$

$$q = -\frac{p}{2} \Rightarrow r = 4(1 + \sin(-\frac{p}{2})) = 0$$

منحنی دوم از قطب نمی گذرد.

فصل دوم: حد و پیوستگی ۱۱

$$\frac{3}{1-\sin q} = 4(1+\sin q) \Rightarrow \cos^2 q = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos q = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$q = \pm \frac{p}{6}, \frac{5p}{6}, \frac{7p}{6}$$

2. نمودار  $r = \sin \frac{3}{2}q$ ، خودش را قطع می کند. نقاط تقاطع را تعیین کنید.

تمرین صفحه 469

1. ضریب زاویه خط مماس بر منحنی  $r = 1 + \sin q$  را در نقطه

$(\frac{p}{3}$  و  $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ) بدست آورید.

(حل)

$$\frac{dr}{dq} = \cos q, \quad \text{tg} \frac{p}{3} = \sqrt{3}$$

$$m = \text{tg} d = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})\sqrt{3}}$$

$$m = \frac{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - \frac{3}{2}}$$

2. زاویه بین شعاع حامل و خط مماس بر منحنی های زیر را در نقاط

مفروض بدست آورید.

$$p(\sqrt{2}, \frac{p}{6}), r^2 = 4 \cos 2q \quad (\text{الف})$$

$$tgb = \frac{r}{\frac{dr}{dq}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{-\sin 2q}{\sqrt{4 \cos 2q}}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}} = -\frac{4}{\sqrt{3}} \quad (\text{حل})$$

$$p(3, p), r = 3(1 - \sin q) \quad (\text{ب})$$

$$tgb = \frac{r}{\frac{dr}{dq}} = \frac{3}{-\cos q} = 1 \Rightarrow b = \frac{p}{4}$$

3. مطلوب است اندازه زاویه کوچکترین خطهای مماس بر نقطه تقاطع

داده شده در منحنی

$$p(-2, \frac{2p}{3}), r = 4 \cos^2 q - 3, r = 4 \cos q$$

$$m_1 = tgd_1 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}) - 2}{-4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times (-\frac{\sqrt{3}}{3})} = \frac{2-2}{-4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times (-\frac{\sqrt{3}}{2})} = 0$$

$$\begin{aligned}
 m_2 = \operatorname{tg} d_2 &= \frac{-8 \sin \frac{2p}{3} \cos \frac{2p}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 2}{-8 \sin \frac{2p}{3} \cos \frac{2p}{3} + 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)} \\
 &= \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 2}{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}} =
 \end{aligned}$$

4. دلنمای  $r = 2(1 - \cos q)$  مفروض است. ثابت کنید  $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} \frac{q}{2}$

(حل)

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{dq} = 2 \sin q \Rightarrow \operatorname{tg} b &= \frac{r}{\frac{dr}{dq}} = \frac{1 - \cos q}{\sin q} \\
 \Rightarrow \operatorname{tg} b &= \frac{2 \sin^2 \frac{q}{2}}{2 \cos \frac{q}{2} \sin \frac{q}{2}} = \frac{\sin \frac{q}{2}}{\cos \frac{q}{2}} = \operatorname{tg} \frac{q}{2}
 \end{aligned}$$

5. ثابت کنید. به ازای هر  $a, b$ ، خطوط مماس در هر یک از نقاط تقاطع

دلنمای زیر متعامند.

حل المسائل رياضى عمومى (١)

١٤

$$r = a(1 + \sin q) , r = b(1 - \sin q)$$

## فصل دهم

# کاربردهای انتگرال

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۱۶

5-1-10 تمرین صفحه 476

1. سطح محصور به نمودار توابع  $x = y^2$ ,  $x = 2y^2 - y - 2$  را محاسبه

کنید.

(حل)

$$y^2 = 2y^2 - y - 2 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1, y = 2$$

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{-1}^2 (y^2 - y - 2) dy \right| = \left| \left( \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 2y \right) \right| \\ &= \left| \left( \frac{8}{3} - 2 - 4 \right) - \left( \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \right| = \left| \frac{-10}{3} - \frac{7}{6} \right| \\ &= \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

2. سطح محصور به نمودار توابع  $2y^2 - y + 3 - x = 0$ ,  $x - y = 7$  را

محاسبه کنید

(حل)

$$\begin{aligned}
 x &= v + y, \quad x = 2y^2 - y + 3 \\
 v + y &= 2y^2 - y + 3 \Rightarrow 2y^2 - 2y - 4 = 0 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1, y = 2 \\
 s &= \left| \int_{-1}^2 (2y^2 - 2y - 4) dy \right| = \left| \left( \frac{2}{3} y^3 - y^2 - 4y \right) \right| \\
 &= \left| \left( \frac{16}{3} - 12 \right) - \left( -\frac{2}{3} - 1 - 4 \right) \right| = |6 - 12 + 5| = 1
 \end{aligned}$$

3. سطح محصور به نمودار توابع  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  را در فاصله

$0 \leq x \leq 2p$  محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
 s &= \left| \int_0^{\frac{p}{4}} (\cos x - \sin x) dx \right| + \left| \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} (\sin x - \cos x) dx \right| \\
 &+ \left| \int_{\frac{3p}{4}}^{2p} (\sin x - \cos x) dx \right| \\
 s &= 3
 \end{aligned}$$

4. سطح محصور به نمودار توابع  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x^2 - 2x$  را محاسبه

کنید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x &= 4 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \\
 \Rightarrow x^2 - x - 2 &= 0 \Rightarrow x = -1, x = 2 \\
 s &= \left| \int_{-1}^1 (4 - 2x^2 + 2x) dx \right| = \left( 4x - \frac{2}{3}x^3 + x^2 \right) \\
 &= 8 - \frac{16}{3} + 4 + 4 - \frac{2}{3} - 1 = 15 - \frac{16}{3} = \frac{29}{3}
 \end{aligned}$$

5. مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به خطوط  $x=2$ ,  $x=0$  و

منحنی های  $y=2x$ ,  $y=2x-x^2$

$$s = \left| \int_0^2 (2x - x^2 - 2x) dx \right| = \left| -\frac{x^3}{3} \right| = \frac{8}{3}$$

6. سطح محصور به نمودار توابع  $x=2y^2$ ,  $x=1-3y^2$  را محاسبه

کنید.

(حل)

۱۹ فصل دوم: حد و پیوستگی

$$2y^2 = 1 - 3y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$s = \int_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} (1 - 3y^2 - 2y^2) dy = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} (1 - 3y^2 - 2y^2) dy$$

$$= 2 \left( y - y^3 - \frac{2}{3} y^3 \right) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{5\sqrt{5}} - \frac{2}{15\sqrt{5}} \right)$$

7. مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به سهمی  $y = \frac{8}{x+4}$ ،  $x^2 = 4y$

(حل)

$$\frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2+4} \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 8)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$s = \int_{-2}^2 \left( -\frac{x^2}{4} + \frac{8}{x^2+4} \right) dx = 2 \int_0^2 \frac{8}{x^2+4} dx - 2 \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx$$

$$= 8 \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{x}{2} \right) \Big|_0^2 - \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = 2p - \frac{4}{3}$$

8. مساحت قسمتی از ربع اول را که داخل دایره  $x^2 + y^2 = 3$  و محدود به

سهمی های  $x^2 = 2y$ ،  $y^2 = 2x$  می باشد، حساب کنید.

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۲۰

(حل) این مساحت با انتگرال دوگانه در ریاضی 2 حل می شود.

9. مساحت ناحیه ای را حساب کنید که به خطوط  $y = x + 1$ ,  $y = \cos x$  و

محور  $x$  ها محدود است.

(حل) صورت سؤال اشتباه است.

10. مطلوب است محاسبه مساحت بین منحنی  $x = 2$ ,  $y = x^2 - x^3$

(حل)

$$x = 2 \Rightarrow y^2 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$s = 2 \int_0^2 \sqrt{x^3 - x^2} dx = 2 \int_0^2 x \sqrt{1-x} dx$$

$$1-x = u^2 \Rightarrow dx = -2u du$$

$$s = -4 \int u^2 (1-u^2) du = -4 \left( \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

$$= 8 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{16}{15}$$

11. مساحت بین منحنی های  $y = (x-4)^2$ ,  $y = 16-x^2$  و محور  $x$  ها را

تعیین کنید.

(حل)

۲۱ فصل دوم: حد و پیوستگی

$$16 - x^2 = (x - 4)^2$$

$$16 - x^2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0, 4$$

$$s = \int_0^4 (16 - x^2 - (x - 4)^2) dx = 16x - \frac{x^3}{3} - \frac{(x - 4)^3}{3} \Big|_0^4$$

$$= (64 - \frac{64}{3}) + \frac{64}{3} = 64$$

12. مطلوب است مساحت محدود به منحنی  $y = x^4 - 2x^2 + 3$  و محور  $x$  ها که

بین عرض های نقاط می نیمم  $y(x)$  واقع است.

(حل)

$$y' = 4x^3 - 6x^2 + 2x = x(x - 1)(4x - 2)$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 1, x = \frac{1}{2}$$

$$y = 3, y = 3, y = \frac{49}{16}$$

13. مساحت محدود به نمودار تابع  $x = 2(y - 1)^2$ ,  $(y - 1)^2 = x - 1$  را محاسبه

کنید.

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$x = 2(x-1) \Rightarrow X = 2$$

$$(y-1)^2 = 1 \Rightarrow y = 0, y = 2$$

$$s = \int_0^2 (1 + (y-1)^2 - 2(y-1)^2) dy = \int_0^2 (1 - (y-1)^2) dy$$

$$= \left( y - \frac{(y-1)^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \left( 2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

14. سطح محصور به نمودار  $y = chx$  و خط  $x = 1$  و محور  $x$  ها را حساب

کنید

(حل) مساحتی وجود ندارد.

15. مساحت های دو ناحیه ای را که سهمی  $y = \frac{1}{2}x^2$  درون دایره  $x^2 + y^2 = 8$

تقسیم می کند محاسبه کنید.

(حل)

$$y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{x^4}{4} = 8 \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 8)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

مساحت نیم دایره بالایی برابر نصف  $8p = p(2\sqrt{2})^2$  است یعنی  $4p$  است.

16. مراکز دو قرص مستدیر به شعاع واحد در فاصله  $2a$  از هم قرار دارند

۲۳ فصل دوم: حد و پیوستگی

$(0 < a < 1)$  مساحت ناحیه ای را بیابید که محدود به دو قرص است.

(حل) دایره های  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ,  $(x+1)^2 + y^2 = 1$  را در نظر می گیریم خط

$x=1-a$  وتر مشترک دودایره است. به علت تقارن مساحت بین

$(x-1)^2 + y^2 = 1$  و خط را محاسبه و دو برابر می کنیم

$$\begin{aligned} x=1-a &\Rightarrow (1-a-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-a^2} \\ s &= 2 \int_{-\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-a^2}} (1-a - (1-\sqrt{1-y^2})) dy \\ &= 4 \int_0^{\sqrt{1-a^2}} (\sqrt{1-y^2} - a) dy = 4 \left( \int_0^{\sin^{-1}\sqrt{1-a^2}} \cos^2 q dq - \int_0^{\sqrt{1-a^2}} a dv \right) \\ &= 4 \left( \frac{1}{2} \sin^{-1}(\sqrt{1-a^2}) + \frac{1}{4} \sin 2(\sin^{-1}\sqrt{1-a^2}) - a\sqrt{1-a^2} \right) \end{aligned}$$

(18) اگر  $f(x) = ax$ ,  $g(x) = x^3$  ( $a > 0$ ) ثابت) انگاه مساحت محصور به دو

منحنی را حساب کنید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 ax = x^3 &\Rightarrow x = 0, x = \sqrt{a}, x = -\sqrt{a} \\
 s &= \left| \int_{-\sqrt{a}}^0 (ax - x^3) dx \right| + \left| \int_0^{\sqrt{a}} (x^3 - ax) dx \right| \\
 &= 2 \left| \int_0^{\sqrt{a}} (x^3 - ax) dx \right| = 2 \left| \left( \frac{x^4}{4} - a \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{a}} \right| \\
 &= 2 \left| \left( \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \right) \right| = \frac{a^2}{2}
 \end{aligned}$$

19) مساحت محصور به نمودار  $x^2 y + 4y - 12 = 0$  و محور مختصات و

خط  $x=2$  را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
 y(x^2 + 4) = 12 &\Rightarrow y = \frac{12}{4 + x^2} \\
 s &= \int_0^2 \frac{12}{4 + x^2} dx = 6 \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{x}{2} \right) \Big|_0^2 = 6 \frac{p}{4} = \frac{3p}{2}
 \end{aligned}$$

20. مساحت محصور به نمودار توابع  $x = y^3$ ,  $y = x^3$ ,  $x + y = 2$  را

محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \int_0^1 (2 - y - \sqrt[3]{y}) dy \\
 s_2 &= \int_0^1 (2 - y - \sqrt[3]{y}) dx \\
 s_1 = s_2 &= \left( 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} \right) \Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

تمرین صفحه 480

مساحت سطح محصور را بیابید.

1.

$$-1 \leq t \leq 1, \quad c: \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$$

$$g(t) = t^3 - t \Rightarrow g(-1) = -2, g(1) = 0$$

$$f(t) = t^2 - 1 \Rightarrow f'(t) = 2t$$

$$\begin{aligned} s &= \int_{-2}^0 (t^3 - t)(2t) dt = \left. \frac{2}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 \right|_{-2}^0 \\ &= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} = \frac{192 - 160}{15} = \frac{32}{15} \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq 2, \quad c: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \cos^2 t \end{cases}$$

$$x^4 + y^2 = x^2$$

شکل کاملاً متقارن است. "

$$\begin{aligned}
 s &= 4 \int_0^{\frac{p}{4}} \cos t (\cos^3 t - 2 \sin^2 t \cos t) dt \\
 &= 4 \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^4 t dt - 8 \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt \\
 \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^4 t dt &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{p}{2}} (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt \\
 &= \frac{1}{4} \left( t + \sin 2t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{8} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} \\
 &= \frac{1}{4} \left( \frac{p}{2} + \frac{p}{4} \right) = \frac{3p}{16}
 \end{aligned}$$

(3) مساحت بیضی  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
 x &= a \cos t \\
 y &= b \sin t
 \end{aligned}$$

حل) بیضی را به صورت زیر پارامتری می کنیم:  $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned}
 s &= 4 \left| \int_0^{\frac{p}{2}} -b \sin t (a \sin t) dt \right| = \left| -2ab \int_0^{\frac{p}{2}} (1 - \cos 2t) dt \right| \\
 &= 2ab \times \frac{p}{2} = pab
 \end{aligned}$$

(4) مساحت محدود به  $\frac{x^2}{3} + y^2 = a$  را محاسبه کنید.

5. مساحت محدود به یک قوس سیکلوئید زیر را بدست آورید.

$$\begin{aligned}
 c: \quad x &= a(t - \sin t) \\
 y &= a(1 - \cos t)
 \end{aligned}$$

فصل دوم: حد و پیوستگی ۲۷

$$s = \int_0^{\frac{p}{2}} a(1 - \cos t)^2 dt = a \int_0^{\frac{p}{2}} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt$$

$$= \left( t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{3p}{4} - 2$$

تمرین صفحه 483

1. مساحت ناحیه ای از صفحه را که بین اولین و دومین دور از پیچ ارشمیدس

$r = aq$  واقع است. ( $a > 0$ ) پیدا کنید.

$$s = \frac{1}{2} \int_0^{4p} (aq^2) dq = \frac{1}{2} \frac{a}{3} q^3 \Big|_0^{4p} = \frac{16}{2} \frac{4}{3} ap^3$$

2. مطلوب است سطح محدود به  $r = \sin 2q$

(حل) به علت تقارن کامل داریم:

$$s = \frac{1}{2} \times 4 \int_0^{\frac{p}{2}} (\sin 2q)^2 dq = \int_0^{\frac{p}{2}} (1 - \cos 4q) dq = \frac{p}{2}$$

3. مساحت داخل دایره  $r = 3 \cos q$  و خارج دلنمای  $r = 1 + \cos q$  را بیابید

(حل)

$$3 \cos q = 1 + \cos q \Rightarrow \cos q = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm \frac{p}{3}$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{p}{3}}^{\frac{p}{3}} ((3 \cos q)^2 - (1 + \cos q)^2) dq \\ &= \int_0^{\frac{p}{3}} (2 \cos^2 q - 2 \cos q - 1) dq = \left( q + \frac{1}{2} \sin 2q - 2 \sin q - q \right) \Big|_0^{\frac{p}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3} \Rightarrow s = \frac{\sqrt[3]{3}}{4} \end{aligned}$$

4. مساحت محصور به  $r = e^{2q}$  و خطوط  $q = 2p$ ,  $q = 0$ .

$$s = \frac{1}{2} \int_0^{2p} e^{4q} dq = \frac{1}{8} e^{2p} \Big|_0^{2p} = \frac{1}{8} (e^{4p} - 1)$$

5. مطلوب است مساحت داخل دایره  $r = 1$  و خارج دایره  $r = 1 - \cos q$ .

(حل) دو نمودار همدیگر را در  $q = \frac{p}{2}$ ,  $q = \frac{3p}{2}$  قطع می کنند.

به علت تقارن، مساحت در فاصله  $0 \leq q \leq \frac{p}{2}$  را حساب کرده، دو برابر می کنیم.

$$\begin{aligned} s &= 2 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{p}{2}} (1 - (1 - \cos q))^2 dq \\ &= \int_0^{\frac{p}{2}} (2 \cos q - \cos^2 q) dq = \left( 2 \sin q - \frac{1}{2} q - \frac{1}{4} \sin 2q \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} = 2 - \frac{p}{4} \end{aligned}$$

6. مطلوب است مساحت ناحیه مشترک به دو منحنی  $r = \sin 2q$ ,  $r = \cos 2q$ .

(حل) به علت تقارن، مساحت را در ربع اول حساب کرده، چهار برابر می کنیم.

7. مساحت ناحیه بین  $r = 6 \sin q$  ,  $r = 6 \cos q$  را حساب کنید.

$$\begin{aligned} S &= \left| 2 \int_0^{\frac{p}{4}} (6 \sin q)^2 \right| \\ &= \left| 6 \int_0^{\frac{p}{4}} (1 - \cos 2q) dq \right| \\ &= \left| 6(q - 2 \sin 2q) \Big|_0^{\frac{p}{4}} \right| \\ &= 6 \left( \frac{p}{4} - 2 \right) \end{aligned}$$

8. مساحت ناحیه داخل  $r^2 = a^2 \cos 2q$  را بدست آورید.

(حل)

$$S = 4 \int_0^{\frac{p}{4}} a^2 \cos 2q = 4a^2 \sin 2q \Big|_0^{\frac{p}{4}} = 4a^2$$

9. مساحت ناحیه  $r = 1 + \sin q$  را محاسبه کنید.

حل طبق مثال 3-3-10 برابر  $\frac{3}{2}p$  است.

10. مساحت محدود به درون  $r^2 = \sin 2q$  و دایره  $r = \sqrt{2} \sin q$  را محاسبه

کنید.

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{p}{2}} 2 \sin^2 q - \sin 2q \, dq \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} q - \frac{1}{4} \sin 2q + \frac{1}{2} \cos 2q \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{p}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{4} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

تمرین صفحه 489 .

1. طول منحنی  $r = a \sin^3 \frac{q}{3}$  را در فاصله  $0 \leq q \leq p$  محاسبه کنید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^p \sqrt{(dr)^2 + r^2 (dq)^2} = \int_0^p \sqrt{a^2 \sin^4 \frac{q}{3} \cos^2 \frac{q}{3} + a^2 \sin^6 \frac{q}{3}} \, dq \\
 &= \int_0^p a \sin^2 \frac{q}{3} \, dq = \frac{a}{2} \int_0^p (1 - \cos^2 \frac{q}{3}) \, dq \\
 &= \frac{a}{2} \left( q - \frac{3}{2} \sin \frac{2q}{3} \right) \Big|_0^p = \frac{a}{2} \left( p - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)
 \end{aligned}$$

2. مطلوب است طول قوس  $r = 2a \cos^2 q$  را در فاصله  $0 \leq q \leq \frac{p}{4}$  بیابید.

(حل)

۳۱ فصل دوم: حد و پیوستگی

$$\frac{d}{dq} = -2a \sin 2q$$

$$s = \int_0^{\frac{p}{4}} \sqrt{4a^2 \sin^2 2q + 4a^2 \cos^2 2q} dq = 2a \int_0^{\frac{p}{4}} \cos q \sqrt{4 \sin^2 q + \cos^2 q} dq$$

$$= 2a \int_0^{\frac{p}{4}} \cos q \sqrt{3 \sin^2 q + 1} dq = 2a \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1+3u^2} du$$

$$\sqrt{3}u = \operatorname{tgt} = \int \sqrt{1+3u^2} du = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \sec^3 q dq$$

3. طول دلواری  $r = a(1 - \cos q)$  را بیابید.

$$\frac{dr}{dq} = a \sin q \Rightarrow \left(\frac{dr}{dq}\right)^2 + r^2 = a^2 \sin^2 q + a^2 \cos^2 q + a^2$$

(حل)

$$s = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2a^2} dq = 2\sqrt{2}ap$$

4. طول منحنی‌های زیر را در بازه داده شده محاسبه کنید.

الف)  $0 \leq t \leq 2p$  ,  $y = \sin 2t$  ,  $x = \cos 2t$

(حل)

$$s = 4 \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t} dt = 2p$$

ب)  $0 \leq q \leq 2p$  ,  $y = a \sin^3 q$  ,  $x = a \cos^3 q$

(حل)

$$\frac{dx}{dq} = -3a \cos^2 q \sin q, \quad \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 q \cos q$$

$$s = 4 \int_0^{\frac{p}{2}} 3a \sin q \cos q dq = 12a \left. \frac{\sin^2 q}{2} \right|_0^{\frac{p}{2}} = 6a$$

5. طول قسمتی از منحنی  $y^2 = x^3$  را که بین نقاط  $(0, 0)$  و  $(4, 8)$  واقع است،

محاسبه کنید.

$$y^2 = x^3 \Rightarrow 2yy' = 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2y} \Rightarrow (y')^2 = \frac{9x^4}{4y^2}$$

$$\Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \frac{9}{4}x$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} \left(1 + \frac{9}{4}x\right) \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \Big|_0^4$$

$$= \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

6. طول منحنی  $y = \ln|\cos x|$  را در فاصله  $0 \leq x \leq \frac{p}{4}$  محاسبه کنید.

(حل)

$$y' = -\tan x \Rightarrow s = \int_0^{\frac{p}{4}} \sec x dx$$

$$\Rightarrow s = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{p}{4}} = \ln |\sqrt{2} + 1|$$

7. طول قوس منحنی  $y = \frac{1}{2}x^2$  از نقطه  $A(0, 0)$  تا نقطه  $B(1, \frac{1}{2})$  را محاسبه

کنید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 y' = x &\Rightarrow s = \int_0^{-1} \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{p}{4}} \sec^3 q dq \\
 \int \sec^3 q dq &= \int \sec^2 q \cdot \sec q dq = \operatorname{tg} q \cdot \sec q - \int \operatorname{tg}^2 q \cdot \sec q dq \\
 &= \operatorname{tg} q \cdot \sec q - \int \sec^3 q dq + \int \sec q dq \\
 \int \sec^3 q dq &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} q \cdot \sec q + \frac{1}{2} \ln |\sec q + \operatorname{tg} q| \\
 s &= \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg} q \sec q + \frac{1}{2} \ln |\sec q + \operatorname{tg} q| \right) \Big|_0^{\frac{p}{4}} \\
 &= \left( \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \ln \sqrt{2} \right)
 \end{aligned}$$

8. طول قوس منحنی  $y^3 = 8x^2$  از نقطه (2, 1) تا نقطه (18, 27) را به دست

آورید.

(حل)

$$3y^2 y' = 16x \Rightarrow y' = \frac{16x}{3y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2}{16x} \Rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{9y^4}{(16)^2 x^2} = \frac{9 \times 8y}{(16)^2}$$

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{9}{32}y$$

$$s = \int_2^{18} \sqrt{1 + \frac{9}{32}y} dy = \frac{2}{3} \times \frac{32}{9} \left(1 + \frac{9}{32}y\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^{18}$$

$$= \frac{64}{27} \left( \left(1 + \frac{9}{32} \times 18\right) \sqrt{1 + \frac{9}{32} \times 18} - \left(1 + \frac{9}{32} \times 2\right) \sqrt{1 + \frac{9}{32} \times 2} \right)$$

9. طول قوس منحنی  $6xy = y^4 + 3$  را در فاصله  $1 \leq y \leq 2$  به دست آورید.

$$x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2y^2}$$

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2}\right)^2$$

$$s = \int_1^2 \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2}\right) dy = \left(\frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y}\right) \Big|_1^2 = \left(\frac{8}{6} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6} + \frac{1}{4}$$

10. طول قوس قسمتی از منحنی  $9y^2 = 4(1+x^2)^3$  که در ربع اول از  $x=0$  تا

$x=2\sqrt{2}$  واقع است تعیین کنید.

۳۵ فصل دوم: حد و پیوستگی

$$18yy' = 24x(1+x)^2 \Rightarrow y' = \frac{4x(1+x)^2}{3y}$$

$$(y')^2 = \frac{16x^2(1+x)^4}{9y^2} = 4x^2(1+x)^2$$

$$s = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2(1+x)^2} dx$$

11. طول قوس منحنی مقابل را

بیابید:

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t), \frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^t \Big|_0^4 = \sqrt{2}(e^4 - 1)$$

$$C: \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 4$$

(حل)

12. طول قوس منحنی c را به دست آورید:

$$C: \begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2} \\ y = tg^{-1} t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

(حل)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{1+t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{\frac{t^2}{(1+t^2)} + \frac{1}{(1+t^2)^2}} dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \Big|_0^1$$

$$= \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$

13. طول قوس  $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$  را در فاصله  $0 \leq x \leq 3$  محاسبه کنید.

(حل)

$$y' = x(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + x^2(x^2 + 2)$$

$$s = \int_0^3 \sqrt{1 + x^2(x^2 + 2)} dx = \int_0^3 \sqrt{(x^2 + 1)^2} dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^3 = 12$$

14. طول قوس  $y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  را در فاصله  $2 \leq x \leq 3$  تعیین کنید.

(حل)

$$y = \ln(e^x - 1) - \ln(e^x + 1)$$

$$y' = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{(e^{2x} + 1)^2}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$s = \int_2^3 \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} dx = \int_2^3 \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \ln(e^x - e^{-x}) \Big|_2^3$$

$$= \ln \frac{e^3 - e^{-3}}{e^2 - e^{-2}}$$

۳۷ فصل دوم: حد و پیوستگی

15. طول قوس منحنی  $y = \frac{1}{3}t^2 + t$ ,  $x = \frac{1}{3}(2t+3)^{\frac{3}{2}}$  را در فاصله  $0 \leq t \leq 3$  محاسبه کنید.

$$\frac{dx}{dt} = (2t+3)^{\frac{1}{2}}, \frac{dy}{dt} = \frac{2}{3}t \quad (\text{حل})$$

$$s = \int_0^3 \sqrt{2t+3 + \frac{4}{9}t^2} dt = \frac{1}{3} \int_0^3 \sqrt{(2t+9)^2 - 78} dt$$

16. طول منحنی  $y = x^4 + \frac{1}{32x^2}$  را در فاصله  $1 \leq x \leq 10$  حساب کنید.

$$y' = 4x^3 - \frac{1}{16x^3} = \frac{64x^6 - 1}{16x^3}$$

$$1 + (y')^2 = \left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right)^2$$

$$s = \int_1^{10} \left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right) dx = x^4 - \frac{1}{32x^2} \Big|_1^{10}$$

$$= \left(10^4 - \frac{1}{3200}\right) - \left(1 - \frac{1}{32}\right)$$

تمرین صفحه 495.

1. حجم حادث از دوران ناحیه OBC حول خط BC را پیدا کنید.

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$V = p \int_0^4 (y-8)^2 dx = p \int_0^4 (x^{\frac{3}{2}} - 8)^2 dx$$

$$= p \int_0^4 (x^3 - 16x^{\frac{3}{2}} + 64) dx = \left( \frac{x^4}{4} - \frac{32}{5} x^{\frac{5}{2}} + 64x \right) \Big|_0^4$$

2. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین سهمی  $y^2 = 4x$  و خط  $y = x$

حول خط  $x = 4$  را بیابید.

3. حجم مخروط مستدیری به شعاع قاعده  $a$  و ارتفاع  $h$  را تعیین کنید.

(حل)

$$y = \frac{a}{h} x$$

$$V = p \int_0^h \frac{a^2}{2} x dx = \frac{1}{3} p a^2 h$$

5. مطلوب است حجم حاصل از دوران ناحیه بین سهمی  $y^2 = x$  و محور

$y$  ها و خط  $y = 1$  ، حول خط  $y = 2$  .

(حل)

$$V = \int_0^1 ((2-\sqrt{x})^2 - (2-1)^2) dx$$

$$= p \int_0^1 (3 - 4\sqrt{x} + x) dx = p \left( 3x - \frac{8}{3} x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = p \left( 3 - \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

فصل دوم: حد و پیوستگی ۳۹

حجم حادث از دوران ناحیه محدود به  $x=2y-y^2$  حول محور  $y$  ها را تعیین کنید.

$$\begin{aligned} V &= p \int_0^2 (2y - y^2)^2 dy = p \int_0^2 (4y^2 - 4y^3 + y^4) dy \\ &= p \left( \frac{4}{3} y^3 - y^4 + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^2 = p \left( \frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} \right) \end{aligned}$$

7. ناحیه A محصور به منحنی  $y=x^2$  و  $y=1$ ،  $y=4$ ،  $x=0$  حول محور

$x$  ها دورانه می کند. حجم جسم حادث چقدر است؟

$$\begin{aligned} V &= 2p \int_{-2}^2 (4^2 - x^4) dx - p \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx \\ V &= 2p \int_0^2 (16 - x^4) dx - 2p \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx \\ &= 2p \left( 16x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 - 2p \left( x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 \\ \Rightarrow V &= 2p \left( 32 - \frac{32}{5} \right) - 2p \left( 1 - \frac{1}{5} \right) \end{aligned}$$

8. منحنی  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  را حول محور  $x$  ها دوران می دهیم، حجم حاصل

چقدر است.

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۴۰

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\begin{aligned} V &= p \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2pb^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\ &= 2pb^2 \left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3} p b^2 a \end{aligned}$$

حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی های  $y = 8x$  ,  $y = x^4$  حول محور  $x$  ها را حساب کنید.

$$x^4 = 8x \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$\begin{aligned} V &= p \int_0^2 (8x - x^4) dx = p \left(4x^2 - \frac{x^5}{5}\right) \Big|_0^2 \\ &= p \left(8 - \frac{32}{5}\right) \end{aligned}$$

10. ناحیه واقع بین محورهای مختصات و سهمی  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$  را حول

محور  $x$  ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را محاسبه کنید.

(حل)

فصل دوم: حد و پیوستگی ۴۱

$$\sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x} \Rightarrow y = a + x - 2\sqrt{ax}$$

$$y^2 = (a+x)^2 - 4(a+x)\sqrt{ax} + 4ax$$

$$V = p \int_0^a ((a+x)^2 - 4(a+x)\sqrt{ax} + 4ax) dx$$

$$\Rightarrow V = \left( \frac{(a+x)^3}{3} - \frac{8}{3} ax\sqrt{ax} - \frac{4}{a^2} \times \frac{2}{5} (ax)^{\frac{5}{2}} + 2ax^2 \right) \Big|_0^a$$

$$= p \left( \frac{8a^3}{3} - \frac{8}{3} a^3 - \frac{8}{5} a^3 + 2a^3 \right) = \frac{8}{15} a^3 p$$

11. ناحیه بین یک قوس از منحنی  $y = \sin x$  و محور عرض ها و خط

$y=1$  را حول محور  $y$  ها دوران می دهیم حجم حاصل را محاسبه کنید.

$$V = 2p \int_0^{\frac{p}{2}} x(1 - \sin x) dx = 2p \left( \frac{x^2}{2} + x \cos x - \sin x - \sin x \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} = 2p \left( \frac{p^2}{8} - 1 \right)$$

12. حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به سهمی  $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$  و خط

$$5x - 8y + 14 = 0 \text{ حول محور } x \text{ ها را به دست آورید.}$$

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$8y = 2x^2 + 4 \Rightarrow 5x + 14 = 2x^2 + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 10 = 0$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{105}}{4}, x = \frac{5 - \sqrt{105}}{2}$$

$$V = p \int_{\frac{5 - \sqrt{105}}{2}}^{\frac{5 + \sqrt{105}}{2}} \left( \frac{1}{4}x^2 + 2 \right)^2 - \left( \frac{5x + 14}{8} \right)^2 dx$$

تمرین صفحه 498 .

1. در یک جسم کروی شکل به شعاع 5 سانتی متر، حفره ای به شعاع 2 سانتی متر ایجاد می کنیم محور حفره یک قطر کرده است. حجم قسمت باقیمانده جسم را بدست آورید.

$$V = \frac{4}{3}p(125) - \frac{4}{3}p = \frac{4}{3}p(125 - 8)$$

$$= \frac{4}{3}p(117)$$

2. مطلوب است حجم جسم حادث از دوران ناحیه OBC محصور به  $y = x^2$  ،  $y = 8$  ،  $y = 0$  حول محور  $x$  ها .

فصل دوم: حد و پیوستگی ۴۳

$$V = p \int_0^4 (64 - x^3) dx = p \left( 64x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^4$$

$$V = p(256 - 64) = 192p$$

3. مطلوب است حجم حادث از دوران ناحیه OAC محصور به منحنی  $y^2 = x^3$

و خط  $x=4$  و محور  $x$  ها حول خط  $ac$ .

$$V = p \int_0^4 ((8 - x^{\frac{3}{2}})^2 - 64) dx$$

$$V = p \int_0^4 ((16 - x^{\frac{3}{2}} + x^3) dx$$

$$V = p \left( \frac{x^4}{4} - \frac{32}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^4 = \left| p \left( 64 - \frac{(32)^2}{5} \right) \right|$$

4. مطلوب است حجم حادث از دوران ناحیه محصور به منحنی های

$y = x^2$ ,  $y = x$  حول خط  $x = -2$ .

(حل)

$$0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$$

$$V = p \int_0^1 (\sqrt{y} + 2)^2 - (y^2 + 2)^2 dy$$

$$V = p \int_0^1 (y + 2\sqrt{y} + 4) - (y^4 + 4y^2 - 4) dy$$

$$V = p \left( \frac{y^2}{2} + \frac{4}{3} y\sqrt{y} - \frac{y^5}{5} + \frac{4y^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$V = p \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{5} + \frac{4}{3} \right) = p \left( \frac{15 + 80 - 6}{30} \right) = \frac{89}{30}$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

5. ناحیه ای که به سهمی  $y = x^2$  و خط  $y = 2x$  محدود و در ربع اول است. حول محور  $y$  ها دوران می کند حجم جسم حاصل را تعیین کنید.

$$V = 2p \int_0^2 x(2x - x^2) dx = 2p \left( \frac{2}{3} x^3 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2$$

$$V = 2p \left( \frac{16}{3} - 4 \right) = \frac{8}{3} p$$

6. حجم جسمی را بیابید که از دوران ناحیه بین سهمی  $y = x^2$  و خط  $y = 2x$  حول خط  $x = 2$  ایجاد می شود.

(حل)

$$V = p \int_0^4 \left( \left( 2 - \frac{y}{2} \right)^2 - (2 - \sqrt{y})^2 \right) dy$$

$$V = p \int_0^4 \left( -2y + \frac{y^2}{4} + 2\sqrt{y} - y \right) dy$$

$$V = p \left( \frac{y^3}{12} + \frac{4}{3} y \sqrt{y} - \frac{3}{2} y^2 \right) \Big|_0^4 = p \left( \frac{64}{12} + \frac{32}{3} - 24 \right)$$

$$V = \left| p \left( \frac{48}{3} - \frac{72}{3} \right) \right| = 8p$$

7. یک دیسک به شعاع و به مرکز  $(b, 0)$  که  $b \leq a \leq 0$  حول محور  $y$  ها دوران می

کند و یک چنبره تولید می کند حجم جسم آن را تعیین کنید.

(حل)

فصل دوم: حد و پیوستگی ۴۵

$$(x-b)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{a^2 - (x-b)^2}$$

$$V = 4p \int_{b-a}^{b+a} x\sqrt{a^2 - (x-b)^2} dx = 4p \int_{-a}^a (x+b)\sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= 4p \int_{-a}^a x\sqrt{a^2 - x^2} dx + 4p \int_{-a}^a b\sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= 8pb \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 8pb \times \frac{\pi a^2}{4} = 2p^2 a^2 b.$$

8. ناحیه مثلثی  $y = x$ ,  $y = 0$ ,  $x = a > 0$  حول خط  $x = b > a$  دوران می کند و

جسمی پدید می آورد. حجم جسم به دست آمده را حساب کنید.

(حل)

$$V = p \int_0^a ((b-y)^2 - (b-a)^2) dy$$

$$V = p \left( \frac{(y-b)^3}{3} - (b-a)^2 y \right) \Big|_0^a = p \left( \frac{(a-b)^3}{3} - a(b-a)^2 \right)$$